Terminale	Correction : Devoir 2	OMRI Rafik

Exercice N°1 : Limites de suites

1. $a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(1 - \sqrt{n}\right)$

Corrigé

D'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Donc par somme et produit :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \sqrt{n}\right) = -\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$$

2. $b_n = \frac{n^3 - n}{n^2 - 3n}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$b_n = \frac{n^3 - n}{n^2 - 3n} = \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{3}{n}\right)} = \frac{n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 - \frac{3}{n}}$$

D'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

- Pour le numérateur : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$
- Pour le dénominateur : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right) = 1$
- Et donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty}$

3. $c_n = n - \sqrt{n}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$c_n = n - \sqrt{n} = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Et donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty}$$

4. $d_n = \sqrt{n^2 + \sin^2 n}$

Corrigé

Pour tout entier n, on a :

$$\sin^2 n \geqslant 0$$

Et la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ implique que pour tout entier naturel n :

$$n^2 + \sin^2 n \geqslant n^2 \Longrightarrow \sqrt{n^2 + \sin^2 n} \geqslant \sqrt{n^2}$$

Donc pour tout entier naturel n :

$$d_n = \sqrt{n^2 + \sin^2 n} > \sqrt{n^2} = |n| = n \text{ car } n \text{ positif}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc par théorème de comparaison :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty \\ d_n > n \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = +\infty}$$

5. $f_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{n^2 - \cos n}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$f_n = \frac{n^2 + \cos n}{n^2 - \cos n} = \frac{n^2\left(1 + \dfrac{\cos n}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \dfrac{\cos n}{n^2}\right)} = \frac{1 + \dfrac{\cos n}{n^2}}{1 - \dfrac{\cos n}{n^2}}$$

Or pour tout entier n non nul :

$$\frac{-1}{n^2} \leqslant \frac{\cos n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc par théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0 \\ \dfrac{-1}{n^2} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n^2} \text{ , (avec } n \geqslant 1) \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$$

Et donc par somme et quotient :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{\cos n}{n^2} = 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{\cos n}{n^2} = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 + \dfrac{\cos n}{n^2}}{1 - \dfrac{\cos n}{n^2}} = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n = 1}$$

6. $g_n = \dfrac{5^n - 6^n}{6^n - 1}$

Corrigé

Pour tout entier n :

$$g_n = \frac{5^n - 6^n}{6^n - 1} = \frac{6^n\left(-1 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right)}{6^n\left(1 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right)} = \frac{-1 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$$

Or d'après le cours sur les limite de suites géométriques de terme général q^n on a :

- puisque $-1 < \left(\dfrac{5}{6}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$;
- puisque $-1 < \left(\dfrac{1}{6}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n = 0$.

Et donc par somme et quotient :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} -1 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = -1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = -1}$$

Exercice N°2 :

Corrigé

1. **[2 points]** Soit pour n entier fixé, $P(n)$ la propriété :

$$\text{«} 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3 \text{»}.$$

- Initialisation (0,25) : $u_1 = 3$ et $u_2 = \sqrt{5}$.

$$1 \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant 3.$$

donc $P(1)$ est vraie.

- Hérédité (1,5) : On suppose que pour un entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie et on cherche à prouver que $P(n+1)$ est encore vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (HR), pour n entier fixé :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3 &\Longrightarrow 2 \leqslant 2u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant 6 \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant 2u_{n+1} - 1 \leqslant 2u_n - 1 \leqslant 5 \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant \sqrt{2u_{n+1} - 1} \leqslant \sqrt{2u_n - 1} \leqslant \sqrt{5} \\ &\qquad \text{car la fonction racine est croissante sur } [1\ ;\ 5] \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3 \end{aligned}$$

- Conclusion (-0,25) : la propriété est vraie au rang 1 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n.

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3}.$$

2. **[0,5 point] Que peut-on en déduire (soyez le plus précis possible) ?**

La suite (u_n) est minorée par 1 et décroissante donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$. D'après l'inégalité démontrée, on a même $1 \leqslant \ell \leqslant 3$.

Exercice N°3 :

1) **Initialisation :** $n = 0,\ u_0 = 0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 4$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 4$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

HR $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 4 \overset{\times 3}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant 3u_n \leqslant 12 \overset{+4}{\Leftrightarrow} 4 \leqslant 3u_n + 4 \leqslant 16$

Comme la fonction racine carrée est croissante que $\mathbb{R}_+$:

$\sqrt{4} \leqslant \sqrt{3u_n + 4} \leqslant \sqrt{16} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

2) a) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n + 4 - u_n^2 = -u_n^2 + 3u_n + 4$

or $-(u_n + 1)(u_n - 4) = -u_n^2 + 4u_n - u_n + 4 = -u_n^2 + 3u_n + 4$

Donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n + 1)(u_n - 4)$.

b) D'après la question 1) : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 4 \ \Rightarrow \ u_n + 1 > 0$ et $u_n - 4 \leqslant 0$

On en déduit que $-(u_n + 1)(u_n - 4) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ u_{n+1}^2 - u_n \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ u_{n+1}^2 \geqslant u_n^2$

Comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$

La suite (u_n) est croissante.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée par 4, d'après le théorème des suites monotone, la suite (u_n) est convergente vers ℓ.

Ce théorème ne permet pas de déterminer la limite donc on ne peut affirmer que $\ell = 4$.

On peut seulement affirmer que $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.

4) $\sqrt{3\ell + 4} = \ell \overset{\uparrow 2}{\Leftrightarrow} 3\ell + 4 = \ell^2 \Leftrightarrow -\ell^2 + 3\ell + 4 = 0 \overset{2\text{ a)}}{\Leftrightarrow} -(\ell + 1)(\ell - 4) = 0$.

$\ell = -1$ ne convient pas car $\ell \geqslant 0$, seule la solution $\ell = 4$ convient.

La suite (u_n) converge vers 4.

Exercice N°4 :

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Initialisation : $u_0 = 2$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, montrons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Par hypothèse : $1 \leqslant u_n \leqslant 2 \Leftrightarrow 2 \leqslant u_n + 1 \leqslant 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{1 + u_n} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\frac{4}{3} \leqslant 1 + \frac{1}{1 + u_n} \leqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{4}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{3}{2} \leqslant 2$.

La proposition est héréditaire.

Conclusion : Par initialisation et hérédité $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) Si la suite u_n converge vers ℓ, on ne peut rien dire quant à sa valeur. On peut simplement dire que $1 \leqslant \ell \leqslant 2$

2) $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = 1 + \frac{1}{1 + \ell} \Leftrightarrow \ell(1 + \ell) = 1 + \ell + 1 \Leftrightarrow \ell + \ell^2 = 2 + \ell \Leftrightarrow$
$\ell^2 = 2 \Leftrightarrow \ell_1 = \sqrt{2}$ ou $\ell_2 = -\sqrt{2}$.

Comme $1 \leqslant \ell \leqslant 2$, on en déduit que $\ell = \sqrt{2}$