Terminale	Correction : Devoir 4	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Corrigé

D'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Donc par somme :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - 2\right) = -2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (3+\sqrt{n}) = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty}$$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$b_n = \frac{n^2-3n}{n^3-n} = \frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n^3\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1-\frac{3}{n}}{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

D'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

- Pour le dénominateur : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} n\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$
- Pour le numérateur : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right) = 1$
- Et donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$c_n = n-\sqrt{n} = n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Et donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty}$$

Corrigé

La croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ implique que pour tout entier naturel n :

$$n^2+1 > n^2 \Longrightarrow \sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2}$$

Donc pour tout entier naturel n :

$$d_n = \sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = |n| = n \text{ car } n \text{ positif}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par théorème de comparaison :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ d_n > n \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty}$$

Corrigé

Pour tout entier naturel n :

$$-n+n^2 \leqslant e_n = n(-1)^n + n^2 \leqslant n+n^2$$

Et donc

$$n^2\left(1-\frac{1}{n}\right) = -n+n^2 \leqslant e_n$$

d'où

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

De ce fait par théorème de comparaison :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\frac{1}{n}\right) = +\infty \\ n^2\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant e_n \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} e_n = +\infty}$$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$f_n = \frac{n+\sin n}{n-\sin n} = \frac{n\left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)}{n\left(1-\dfrac{\sin n}{n}\right)} = \frac{1+\dfrac{\sin n}{n}}{1-\dfrac{\sin n}{n}}$$

Or pour tout entier n non nul :

$$\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc par théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0 \\ \dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} \text{ , (avec } n \geqslant 1) \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

Et donc par somme et quotient :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{\sin n}{n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{\sin n}{n} = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\dfrac{\sin n}{n}}{1-\dfrac{\sin n}{n}} = \lim_{n\to+\infty} f_n = 1}$$

Corrigé

Pour tout entier n :

$$g_n = \frac{2^n-3^n}{3^n-1} = \frac{3^n\left(-1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)} = \frac{-1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$$

Or d'après le cours sur les limite de suites géométriques de terme général q^n on a :

- puisque $-1 < \left(\dfrac{2}{3}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$;
- puisque $-1 < \left(\dfrac{1}{3}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Et donc par somme et quotient :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} -1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = -1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n = -1}$$

Exercice N°2 :

Corrigé

La somme s_n correspond à la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $q = -\dfrac{4}{5}$ et de premier terme $\left(-\dfrac{4}{5}\right)^0 = 1$. On obtient donc :

$$s_n = 1 \times \frac{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)} = \frac{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{9}{5}\right)} = \frac{5}{9} \times \left(1-\left(-\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Or d'après le cours sur les limite de suites géométriques de terme général q^n on a :

- puisque $-1 < -\left(\dfrac{4}{5}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-4}{5}\right)^n = 0$.

Et donc par somme et produit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\left(-\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) = 1 \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{9} \times \left(1-\left(-\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) = \boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{5}{9}}$$

Exercice N°3 :

1. L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de 3000+80, c'est-à-dire 3080. Entre le 1er novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1er juin 2018 est donc :

$$u_1 = 3080 \times 0{,}95 = 2926.$$

2. En généralisant, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n+80)\times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 80\times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n+76. \end{aligned}$$

3. *Tableau*

n	2	4	6	8	10	12	14	16
u_n	2856	2725	2608	2502	2406	2320	2242	2171

4. a. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,520$.

— **Initialisation** : On doit démontrer que la propriété est vrai au rang le plus bas, c'est à dire $u_0 \geqslant 1\,520$.
C'est évidant car $u_0 = 3\,000$.
La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

— **Hérédité.** Supposons que la propriété est vraie pour un entier naturel n, c'est à dire $u_n \geqslant 1\,520$ et sous cette hypothèse montrons que la propriété est vraie au rang d'après c'est à dire $u_{n+1} \geqslant 1\,520$.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1\,520$, donc, en multipliant membre à membre par 0,95 :

$$0{,}95u_n \geqslant 0{,}95\times 1\,520$$

puis, en ajoutant membre à membre 76 :

$$0{,}95u_n+76 \geqslant 0{,}95\times 1\,520+76$$

ce qui équivaut à :

$$u_{n+1} \geqslant 1520$$

La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion.** La propriété est vrai au rang 0, elle est héréditaire à partir de ce rang donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tous les entiers naturels c'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geqslant 1\,520$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 0{,}95u_n+76-u_n \\ &= -0{,}05u_n+76. \end{aligned}$$

D'après la question précédente on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_n &\geqslant 1\,520 \\ -0{,}05u_n &\leqslant -0{,}05\times 1\,520 \\ -0{,}05u_n &\leqslant -76 \\ -0{,}05u_n+76 &\leqslant 0 \\ u_{n+1}-u_n &\leqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 1520 donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite supérieure ou égale à 1520.

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-1\,520 \\ &= 0{,}95u_n+76-1\,520 \\ &= 0{,}95u_n-1\,444 \\ &= 0{,}95\left(u_n-\frac{1\,444}{0{,}95}\right) \\ &= 0{,}95\,(u_n-1\,520) \\ &= 0{,}95v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}95$.
Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1\,520 = 1\,480$.

b. La suite étant géométrique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0q^n$c'est à dire $v_n = 1\,480 \times 0{,}95^n$. Et comme $v_n = u_n - 1\,520$, on en déduit que $u_n = v_n + 1\,520$, ce qui donne bien

$$u_n = 1\,480\times 0{,}95^n + 1\,520.$$

c. $-1 < 0{,}95 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$, on en déduit, par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$.

6. Algorithme complété :

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u ⩾ 2000 :
    n ← n + 1
    u ← 0,95 * u + 76
Fin de Tant que
```

7. La limite de la suite (u_n) est 1 520 qui est inférieur à 2000, donc la réserve fermera un jour. Pour déterminer l'année de fermeture, on regarde la table de la calculatrice et on remarque que $u_{21} \approx 2024 > 2000$ et $u_{22} \approx 1999 < 2000$. C'est donc la 22e année que la réserve fermera, soit en 2039.

Exercice N°4 :

1. Pour tout entier naturel n on a :

$$T_{n+1} - T_n = -0{,}2\,(T_n - 10)$$
$$T_{n+1} = T_n - 0{,}2\,(T_n - 10)$$
$$T_{n+1} = 0{,}8\,T_n + 2.$$

2. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.

a. Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= T_{n+1} - 10 \\ &= 0{,}8\,T_n + 2 - 10 \\ &= 0{,}8\,T_n - 8 \\ &= 0{,}8\,(T_n - 10) \\ &= 0{,}8\,u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $u_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70$.

b. La suite (u_n) étant géométrique, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 70 \times 0{,}8^n$.
Comme de plus $u_n = T_n - 10$ on a $T_n = u_n + 10$, on obtient donc $\boxed{T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10}$.

c. $-1 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 70 \times 0{,}8^n = 0$ On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = 10}$.

3. a. Cet algorithme détermine la plus petite valeur de n tel que $T(n) < 40$ or, d'après la calculatrice, $T(3) \approx 45{,}8 > 40$ et $T(4) \approx 38{,}7 < 40$ donc $\boxed{\text{à la fin de l'algorithme } n \text{ vaut } 4.}$

b. $\boxed{\text{Au bout de 4 minutes, la température du café est descendu en dessous de 40 °C}}$.