1. Comment effectuer et rédiger un raisonnement par récurrence pour démontrer des formules algébriques?

Coach : Ce type de raisonnement a été inventé par le génialissime Blaise Pascal (1623-1662), mathématicien, physicien et philosophe français.

Méthode

On donne un nom, par exemple $P(n)$, à la propriété (c'est-à-dire la formule) qu'on veut démontrer. Ensuite, pour montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$, on procède en trois étapes :

Etape 1 : Initialisation. On montre que la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $P(k)$ est vraie pour $n=k$.

Etape 2 : Hérédité. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ l'est encore.

Etape 3 : Conclusion. On rédige alors : « comme $P(k)$ est vraie et qu'il y a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$ ».

Exemple (force 1)

Ex. 1. *Démontrer par récurrence la propriété : pour* $n \geq 1$, $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Coach : N'oublie pas de donner d'abord un nom (par exemple $P(n)$) à la propriété que tu veux démontrer.

Soit $P(n)$ la propriété $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Etape 1 : Initialisation. $P(1)$ est vraie car pour $n=1$, on a : $1=\frac{1\times(1+1)}{2}$.

Etape 2 : Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie (c'est-à-dire que $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$)

et montrons que $P(n+1)$ l'est encore (c'est-à-dire qu'on a :

$1+2+3+...+n+\mathbf{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$).

On a : $1+2+3+...+n+\mathbf{n+1}=\underbrace{1+2+3+...+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+\mathbf{n+1}$ (car $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$),

et donc : $1+2+3+...+n+\mathbf{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+\mathbf{n+1}$ soit :

$$1+2+3+...+n+\mathbf{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{\mathbf{2(n+1)}}{2}=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

(ce qu'on voulait). On a donc bien hérédité.

Etape 3 : Conclusion. Comme $P(1)$ est vraie et qu'on a hérédité, $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 1$ et donc : « Pour $n \geq 1$, $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ».

Coach : 1) il est important d'écrire ce qu'on veut prouver, c'est-à-dire d'écrire en toutes lettres la propriété $P(n+1)$ à démontrer.

2) Si on veut prouver que la propriété est vraie pour $n \geq 0$, on commence l'initialisation à $P(0)$. Pour $n \geq 2$, on commence à $n \geq 2$, etc.

3) Bien sûr, dans un raisonnement par récurrence, on ne va pas te demander de démontrer qu'une propriété est fausse (surtout en Terminale).

EXERCICE-TEST

Coach : Allez, un petit exo pour t'entraîner afin que le raisonnement par récurrence devienne pour toi comme un automatisme !

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Montrer par récurrence que pour* $n \geq 1$, $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$.

2. Comment effectuer et rédiger un raisonnement par récurrence pour démontrer des propriétés sur des suites ?

Coach : Le raisonnement par récurrence a de très belles applications, comme de démontrer certaines propriétés des suites (leur expression, leurs variations, etc.)

Méthode

On donne un nom, par exemple $P(n)$, à la propriété (sur les suites) qu'on veut démontrer. Ensuite, pour montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$, on procède en trois étapes :

Etape 1 : Initialisation. On montre que la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $P(k)$ est vraie pour $n=k$.

Etape 2 : Hérédité. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ l'est encore.

Etape 3 : Conclusion. On rédige alors : « comme $P(k)$ est vraie et qu'il y a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$ ».

Exemple (force 1)

Ex. 1. *Soit* (U_n) *la suite définie par* $U_{n+1}=U_n+61$ *et* $U_0=-267$. *Démontrer par récurrence que pour tout* $n \geq 0$, $U_n=-267+61n$.

Coach : Fais comme d'habitude, donner un nom à la propriété à démontrer.

Soit $P(n)$ la propriété $U_n=-267+61n$.

Etape 1 : Initialisation. $P(0)$ est vraie car pour $n=0$, on a : $U_0=-267+61\times 0$ (car $-267+61\times 0=-267+0=-267$).

Etape 2 : Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire que $U_n=-267+61n$ et montrons que $P(n+1)$ l'est encore, c'est-à-dire qu'on a : $U_{n+1}=-267+61(n+1)$.

On a : $U_{n+1}=\underbrace{U_n}_{-267+61n}+61=-267+61n+61=-267+61(n+1)$ (ce qu'on voulait).

On a donc bien hérédité.

Etape 3 : Conclusion. Comme $P(0)$ est vraie et qu'on a hérédité, $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 0$ et donc : « pour tout $n \geq 0$, $U_n=-267+61n$ ».

Ex. 2. *Soit* (U_n) *la suite définie par* $U_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}U_n$ *et* $U_1=1$.

a) Démontrer par récurrence que $U_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

b) En déduire que la suite (U_n) est strictement croissante.

a) Soit $P(n)$ la propriété $U_n > 0$.

Etape 1 : Initialisation. $P(1)$ est vraie car $U_1 > 0$ $(U_1 = 1)$.

Etape 2 : Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire que $U_n > 0$ et montrons que $P(n+1)$ l'est encore, c'est-à-dire qu'on a : $U_{n+1} > 0$.

On a : $U_{n+1} = \frac{n+1}{n} U_n$, et donc : $U_{n+1} > 0$ car : $\begin{cases} \frac{n+1}{n} > 0 \\ U_n > 0 \end{cases}$. On a donc bien hérédité.

Etape 3 : Conclusion. Comme $P(1)$ est vraie et qu'on a hérédité, $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 1$, et donc $U_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

b)

> **Coach** : Rappelle-toi que $\begin{cases} (U_n) \text{ croissante } \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n > 0 \\ (U_n) \text{ décroissante } \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n < 0 \end{cases}$.

On a : $U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{n} U_n - U_n = \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) U_n = \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n} \right) U_n = \frac{1}{n} U_n$,

donc : $U_{n+1} - U_n > 0$ puisque $U_n > 0$ et $\frac{1}{n} > 0$, donc (U_n) est strictement croissante.

EXERCICES-TESTS

> **Coach** : Au programme, des raisonnements par récurrence qui te permettront de démontrer une formule algébrique et les variations d'une suite.

☐ Exercice-Test (force 1)

ET1. *Soit (V_n) la suite définie par $V_{n+1} = V_n \times 1,45$ et $V_0 = 316$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $V_n = 316 \times 1,45^n$.*

ET2. *Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = \frac{n}{n+1} U_n$ et $U_0 = 3$.*

a) Démontrer par récurrence que $U_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

b) En déduire que la suite (U_n) est strictement décroissante.