Terminale	Devoir 1 : Récurrence et limites	OMRI Rafik

Exercice N°1 : Limites de suites

Déterminer la limite des suites suivantes définies pour n entier, $n \geqslant 1$.

1. $a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)(1 - \sqrt{n})$
2. $b_n = \frac{n^3 - n}{n^2 - 3n}$
3. $c_n = n - \sqrt{n}$
4. $d_n = \sqrt{n^2 + \sin^2 n}$
5. $f_n = \frac{n^2 + \cos n}{n^2 - \cos n}$
6. $g_n = \frac{5^n - 6^n}{6^n - 1}$

Exercice N°2 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}. \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

2. Que peut-on en déduire ? *(soyez le plus précis possible)*

Exercice N°3 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 4$

2) a) Montrer que : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n + 1)(u_n - 4)$

   b) En déduire que la suite (u_n) est croissante. On se justifiera soigneusement.

3) Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ. Peut-on dire que $\ell = 4$?

4) On admet que la limite ℓ vérifie $\sqrt{3\ell + 4} = \ell$. Déterminer ℓ.

Exercice N°4 :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}$

1) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

   b) Si la suite (u_n) converge, Que peut-on dire de sa limite ?

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{1 + x}$. On admet que la suite (u_n) converge vers ℓ telle que $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ.