Terminale	Devoir 2 : Récurrence et limites	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Déterminer la limites des suites (u_n) suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2n^2 - 2n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 4 + \dfrac{\sin n}{n^2}$

Exercice N°2 :

On donne la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$t_0 = 0 \quad \text{et pour tout naturel } n \quad t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Démontrer par rérurrence que, pour tout naturel n, on a : $t_n = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice N°3 : D'après Pondichéry avril 2008

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n(20 - u_n)$

1) Soit f la fonction définie sur $[0\,;20]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{10}x(20 - x)$

   Étudier les variations de f sur $[0\,;20]$.
2) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers ℓ.
4) On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
   En 2015, quel nombre de foyers français possédant un téléviseur à écran plat peut-on envisager ?

Exercice N°4 :

1) **Prérequis** : Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

   Démontrer que toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$

2) **Application :** Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$
   a) Etudier la monotonie de la suite $u_n)$
   b) Montrer par récurrence que pour tout n : $u_n \geqslant n^2$
   c) Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n)