Terminale	Devoir 3 : suite récurrence et limite	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n+1}{3n+5}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n - \sqrt{n} + 3$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + \dfrac{\cos n}{n}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n}$

Exercice N°2 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

1) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2
2) On admet que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$
   a) Montrer que : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$
   b) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. Peut-on en déduire sa limite ?

Exercice N°3 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

1) a) Montrer que l'on peut écrire : $u_{n+1} = 2 - \dfrac{5}{u_n + 4}$
   b) Montrer par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n < 1$
2) On admet que la suite (u_n) est croissante.
   a) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ
   b) On admet que cette limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ où f est la fonction associée à la suite (u_n) telle que $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$. Déterminer la valeur de ℓ
3) Soit la suite v_n définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ dont on déterminera le premier terme.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
   c) Retrouver alors la limite de (u_n) déterminée au 2b)
4) On cherche à déterminer la valeur de N à partir de laquelle $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-6}$. On propose alors l'algorithme suivant où certaines instructions ont été effacées.

a) Recopier cet algorithme et compléter les instructions effacées.

b) Quelle valeur de N donne cet algorithme ?

c) Que pensez-vous de la vitesse de convergence de la suite (u_n) ?

Variables : N : entier U : réel
Entrées et initialisation
$0 \to N$
$0 \to U$
Traitement
tant que $|U-1| \ldots$ **faire**
$\ldots\ldots \to N$
$\ldots\ldots \to U$
fin
Sorties : Afficher N

Exercice N°4 :

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{cases}$$

1. a. Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-4} près :

n	0	1	2	4	6	8	10
u_n	2						

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) et sur le comportement de la suite à l'infini.

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c. La suite (u_n) est-elle convergente? *N'oublier pas de justifier votre réponse*

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Compléter l'algorithme suivant, afin de déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

$n \leftarrow \ldots\ldots\ldots$
$u \leftarrow \ldots\ldots\ldots$
Tant que $\ldots\ldots\ldots$
$n \leftarrow \ldots\ldots\ldots$
$u \leftarrow \ldots\ldots\ldots$
Fin Tant que

QUESTION BONUS

Faire un algorithme permettant de calculer la somme $S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_N$ où N sera un nombre entier naturel donné par l'utilisateur.