Terminale	Devoir 4 : suite récurrence et limite	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Calculer la limite des suites définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

1. $a_n = \left(\frac{1}{n} - 2\right)\left(3+\sqrt{n}\right)$
2. $b_n = \frac{n^2-3n}{n^3-n}$
3. $c_n = n - \sqrt{n}$
4. $d_n = \sqrt{n^2+1}$
5. $e_n = n(-1)^n + n^2$
6. $f_n = \frac{n+\sin n}{n-\sin n}$
7. $g_n = \frac{2^n-3^n}{3^n-1}$

Exercice N°2 :

Soit (s_n) la suite définie pour n entier, $n > 0$ par :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{4}{5}\right)^k$$

Montrer que (s_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°3 :

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

— entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;

— entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide de la calculatrice, compléter par des valeurs approchées à l'unité près le tableau ci-dessous.

n	2	4	6	8	10	12	14	16
u_n								

Quelles conjectures sur le comportement de la suite peut-on déduire de ce tableau et du contexte de l'exercice?

4. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,520$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1\,520$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Exercice N°4 :

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant un modèle utilisant une suite.

Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M) \qquad \text{où } k \text{ est une constante réelle.}$$

On choisit $M = 10$ et $k = -0,2$. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :

$$T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10).$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.

2. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
Déterminer la limite de la suite (T_n).

3. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
      T ← 0,8T + 2
      n ← n + 1
Fin Tant que
```

a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.