Terminale	Série 2 : Raisonnement par récurrence	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

6.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n + 4$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Exercice N°2 :

6.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5 - 4u_n$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Exercice N°3 :

6.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Exercice N°4 :

6.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4$.

Exercice N°5 :

6.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 3$.

Exercice N°6 :

6.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.

Exercice N°7 :

6.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Exercice N°8 :

6.8 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Exercice N°9 :

6.9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

Exercice N°10 :

6.10 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Exercice N°11 :

6.11 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice N°12 :

6.12 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Exercice N°13 :

6.13 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

6.14

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$