Terminale	Série 4 : Suites et récurrence	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

On donne la suite (u_n) suivante : $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $u_0 = 7$.
Démontrer que, pour tout entier n, $u_n = 2^{n+2} + 3$.

Exercice N°2 :

On considère la suite (u_n) suivante : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $u_n \leqslant u_{n+1}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice N°3 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Conjecturer le sens de variation de (u_n).

2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.

3. Démontrer la conjecture.

Exercice N°4 : (D'après Polynésie juin 2013)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que $u_n < 1$ pour tout entier naturel n.
   Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n + 1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice N°5 : (D'après Asie juin 2013)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$$

On admet que tout les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2. **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a :$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1 + 0,5u}{0,5 + u}$ Afficher u FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	$1,008\,3$	$0,997\,3$	$1,00\,09$	$0,999\,7$	$1,000\,1$	$0,999\,97$	$1,000\,01$	$0,999\,996$	$1,000\,001$

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).