OMRI Rafik

Exercice N°1:

On donne la suite (u_n) suivante : $u_{n+1}=2u_n-3$ et $u_0=7$. Démontrer que, pour tout entier $n,\,u_n=2^{n+2}+3$.

Exercice N°2:

On considère la suite (u_n) suivante : $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$ et $u_0=1$.

- 1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n,\, 0 < u_n < 2$.
- 2. Démontrer que, pour tout entier naturel $u_n\leqslant u_{n+1}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice N°3:

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=10$ et, pour tout entier naturel $n,u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$.

- 1. Conjecturer le sens de variation de (u_n) .
- 2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb R$ par $f(x)=rac{1}{2}x+1.$
- 3. Démontrer la conjecture.

Exercice N°4 : (D'après Polynésie juin 2013)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=rac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

- 1. **a.** Calculer u_1 et u_2 .
 - **b.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n,\, 0 < u_n$.
- 2. On admet que $u_n < 1$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- 3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}$.
 - **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
- **b.** Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
- **c.** En déduire que, pour tout entier naturel $n,\,u_n=rac{3^n}{3^n+1}.$
- **d.** Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice N°5 : (D'après Asie juin 2013)

Partie A

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$$

Partie B

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel $n:u_{n+1}=\frac{1+3u_n}{3+u_n}$ De admet que tout les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. 1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n>1$. 2. a. Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$. b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . Partie B De considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel $n:u_{n+1}=\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$. De admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. 1. On considère l'algorithme suivant : $\frac{\mathbf{Entrée}}{\mathbf{Initialisation}} \frac{1}{\mathbf{Affecter}} \frac{1}{\mathbf{a}} \frac{1}{\mathbf{a}}$	artie A						
On admet que tout les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. 1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$. 2. a. Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$. b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . Partie B On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$ On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. 1. On considère l'algorithme suivant : $\frac{\text{Entree}}{\text{Initialisation}} = \frac{\text{Soit un entier naturel non nul } n}{\text{Initialisation}} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$ Traitement Affecter à u la valeur $\frac{1+0,5u}{0,5+u}$ $\frac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u FIN POUR Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n=3$. Les valeurs de u seront arror au millième. $\frac{1}{u} = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{u}$ 2. Pour $n=12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu : $\frac{1}{u} = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-u}$ 3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$. a. Démontrer que la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$. b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n . 4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.	n considère la s	uite (u_n) définie par u_0 :	=2 et, pour	tout entier	naturel n :		
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$. 2. a. Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$. b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . Partie B On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$ On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. On considère l'algorithme suivant: $\frac{\mathbf{Entrée}}{\mathbf{Entrée}} = \frac{\mathbf{Soit}}{\mathbf{u}} \text{ un entier naturel non nul } n$ $\mathbf{Initialisation} = \frac{\mathbf{Affecter}}{\mathbf{a}} u \text{ la valeur } 2$ $\mathbf{POUR} = \mathbf{POUR} \text{ a lalant de 1 à } n$ $\mathbf{POUR} = \mathbf{Affecter} \text{ a} u \text{ la valeur } \frac{1+0,5u}{0,5+u}$ $\mathbf{FIN POUR}$ Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n=3$. Les valeurs de u seront arror au millième. $\frac{i}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3}$ $\frac{1}{u}$				u_{n+1} =	$=\frac{1+3u_n}{3+u_n}$	_	
2. a. Établir que, pour tout entier naturel n , on a $:u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$. b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . Partie B On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$ On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. On considère l'algorithme suivant : $\frac{\text{Entrée}}{\text{Initialisation}} \frac{\text{Soit un entier naturel non nul }n}{\text{Initialisation}} \frac{\text{Affecter } i}{\text{POUR } i} \text{ allant de 1 is }n}{\text{Affecter } i \text{ u la valeur }2}$ $\frac{1+0,5u}{0,5+u}$ Traitement $\frac{\text{Afficher } u}{\text{Afficher } u}$ FIN POUR Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n=3$. Les valeurs de u seront arror au millième. 1. Pour $n=12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu : $\frac{i}{u} \frac{1}{u} \frac{1}{u} \frac{1}{u} \frac{3}{u}$ $\frac{1}{u} \frac{1}{u} \frac{3}{u} \frac{3}{u}$ Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini. 3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$. b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n . a. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$. b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$.	n admet que tou	it les termes de cette suit	te sont défin	is et stricter	nent positif	5.	
b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . Partie B on considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$ on admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. On considère l'algorithme suivant :	1. Démontrer	par récurrence que, poui	tout entier r	naturel n , o	na: $u_n>$	1.	
Partie B on considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$ on admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. On considère l'algorithme suivant :	2. a. Établir qu	ue, pour tout entier natur	el n , on a : u	$_{n+1}-u_{n}=% \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) \right) +\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}n\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}n\left(\frac{1}{n}\left(\frac$	$=\frac{(1-u_n}{3}$	$\frac{(1+u_n)}{u_n}$.	
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$ On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. On considère l'algorithme suivant :	b. Détermir	ner le sens de variation d	e la suite $(u$	$_{n}).$			
On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. On considère l'algorithme suivant :	artie B						
On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs. On considère l'algorithme suivant :	n considère la s	suite (u_n) définie par u	$_{0}=2$ et, po	our tout ent	ier naturel	n:	
On considère l'algorithme suivant :				u_{n+1}	$=rac{1+0}{0,5}$	$\frac{5u_n}{u_n}$	
	n admet que to	us les termes de cette s	suite sont dé	éfinis et stri	ctement po	sitifs.	
$\begin{array}{ c c c c }\hline {\bf Initialisation} & {\bf Affecter \^{a} u la valeur 2} \\ \hline {\bf POUR \it i allant de 1 \^{a} \it n} \\ \hline {\bf Traitement} & {\bf Affecter \^{a} u la valeur \frac{1+0,5u}{0,5+u}} \\ \hline {\bf Afficher \it u} & {\bf Afficher \it u} \\ \hline {\bf FIN POUR} \\ \hline \\ \hline {\bf Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour n=3. Les valeurs de \it u seront arroi au millième.} \\ \hline {\it i 1 2 3 u u u u u u u u u$. On considère l'algo	rithme suivant :					
Traitement et sortie $ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			n nul n				
$\begin{array}{c c} \textbf{Traitement} & \text{Affecter à u la valeur} \ \frac{1+0,5u}{0,5+u} \\ \text{Afficher u} & \text{FIN POUR} \\ \end{array}$ Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n=3$. Les valeurs de u seront arroi au millième. $\begin{array}{c c} \hline i & 1 & 2 & 3 \\ \hline u & & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline u & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline u & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline u & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline u & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline u & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline u & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 $	Initialisation						
Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n=3$. Les valeurs de u seront arroi au millième. $\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $	Traitement		$\frac{1+0,5u}{\sqrt{1-5}}$				
Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n=3$. Les valeurs de u seront arroi au millième. $\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $			0,5+u				
au millième. $\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $							
$\begin{array}{ c c c c c c c c }\hline i&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\\hline u&1,008&3&0,997&3&1,00&09&0,999&7&1,000&1&0,999&97&1,000&01&0,999&996&1,000&001\\\hline \\ Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.\\\hline\\ . On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison -\frac{1}{3}. b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : v_n\neq 1. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}.$	au millième. $i \mid 1 \mid 2 \mid 3$	oléter le tableau suivant, en fais	eant fonctionner	r cet algorithme	e pour $n=3$.	Les valeurs de	$e\ u$ seront arror
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					
Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$. b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n . a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$. b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}$.							
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$. b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n . a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$. b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$.		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		1 0,000 01	1,000 01	0,000 000	1,000 001
b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n . a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \ne 1$. b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$.	. On considère la s	uite (v_n) définie, pour tout e	ntier naturel $\it n$, par : $v_n=-1$	$\frac{u_n-1}{u_n+1}$.		
a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \ne 1$. b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$.	a. Démontrer que	la suite (v_n) est géométriqu	e de raison —	$\frac{1}{3}$.			
b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}.$	b. Calculer v_0 pui	s écrire v_n en fonction de n .					
	. a. Montrer que, po	our tout entier naturel n , on a	$a:v_n eq 1.$				
c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .	b. Montrer que, po	our tout entier naturel n , on a	$\mathbf{a}:u_n=rac{1+}{1-}$	$rac{v_n}{v_n}.$			

i	1	2	3
u			

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
\overline{u}	$1,008\ 3$	$0,997\ 3$	$1,00\ 09$	0,9997	$1,000\ 1$	0,99997	1,000 01	0,999996	$1,000\ 001$

- 3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n 1}{u_n + 1}$.
- 4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.