Terminale	Série 1 : Raisonnement par récurrence	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice N°2 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice N°3 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice N°4 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

Exercice N°5 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice N°6 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Exercice N°7 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < u_n \leqslant 1$.

Exercice N°8 :

On considère une suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\cdot}$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice N°9 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice N°10 :

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

Exercice N°11 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant 3$.

Exercice N°12 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

On veut démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x + 2}$

❶ Déterminer la dérivée f' de f et déterminer son signe sur $[1; +\infty[$.

❷ En déduire les variations de f sur $[1; +\infty[$.

❸ En déduire que si $x \geqslant 1$ alors $f(x) \geqslant 1$.

❹ En utilisant les résultats précédents, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 1$.