Terminale	Bac blanc N°1 : Suite, Espace, Loi Binomiale	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Exercice N°2 :

Correction

Exercice N°3 :

Partie A : Premier modèle - avec une suite

1) a) Pour tout entier naturel n, notons u_n la masse, exprimée en grammes, de bactéries dans la cuve le n-ème jour.

Puisqu'initialement, la cuve contient 1 kg ou encore 1000 g de bactéries, on a effectivement $u_0 = 1\,000$.
Soit $n \geqslant 0$. La masse de bactéries l'année $n+1$ est obtenue en rajoutant à la masse de bactéries l'année n, c'est-à-dire u_n, 0,2 fois cette masse puis en soustrayant 100 g. Donc

$$u_{n+1} = u_n + 0,2u_n - 100 = 1,2u_n - 100.$$

b) 30 kg sont encore 30 000 g. La calculatrice fournit les valeurs suivantes :

n	u_n
0	1 000
1	1 100
2	1 220
3	1 364
4	$1\,536,8$
5	$1\,744,2\ldots$
6	$1\,993,0\ldots$
7	$2\,291,6\ldots$
8	$2\,649,9\ldots$
9	$3\,079,9\ldots$
10	$3\,595,9\ldots$
11	$4\,215,0\ldots$
12	$4\,958,1\ldots$
13	$5\,849,7\ldots$
14	$6\,919,6\ldots$
15	$8\,203,5\ldots$
16	$9\,744,2\ldots$
17	$11\,593,\ldots$
18	$13\,812,\ldots$
19	$16\,474,\ldots$
20	$19\,669,\ldots$
21	$23\,503,\ldots$
22	$28\,103,\ldots$
23	$33\,624,\ldots$

Le jour n° 23 ou encore au bout de 23 jours, la masse de bactéries dépasse 30 kg.

c) Algorithme complété.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u < 30\,000$ faire
	    u prend la valeur $1,2u - 100$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

- $u_0 = 1000$ et en particulier $u_0 \geqslant 1000$. L'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant 1000$. Alors $1,2u_n - 100 \geqslant 1,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} \geqslant 1100$ et en particulier, $u_{n+1} \geqslant 1000$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

b) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = 1,2u_n - 100 - u_n = 0,2u_n - 100.$$

Puisque $u_n \geqslant 1000$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 100$ et en particulier $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2u_n - 100 - 500 = 1,2u_n - 600 = 1,2\,(u_n - 500) = 1,2v_n.$$

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$.

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n,$$

puis que

$$u_n = v_n + 500 = 500 \times 1,2^n + 500.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 500 \times 1,2^n + 500.}$$

c) Puisque $1,2 > 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,2^n = +\infty$ et on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Exercice N°4 :

Soit P_n la propriété: "$0<v_n<1$".

Démontrons par récurrence que, pour tout naturel n non nul, la propriété P_n est vraie.

Initialisation: $v_1 = \dfrac{1}{2 - v_0} = \dfrac{1}{2-0} = 0,5$. On a bien $0<v_1<1$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité:

Soit n un entier naturel non nul, supposons que P_n soit vraie.

$0<v_n<1$.

Donc: $-0>-v_n>-1$. Donc: $2-0>2-v_n>2-1$.

Soit: $2>2-v_n>1$.

Ces nombres sont strictement positifs, donc, par passage aux inverses, on obtient:

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2-v_n}<\dfrac{1}{1}$.

Soit: $0,5<v_{n+1}<1$, et par là: $0<v_{n+1}<1$.

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion: pour tout naturel n non nul, $0<v_n<1$.

1.b. Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2 - v_n} - v_n = \frac{1}{2 - v_n} - \frac{v_n(2 - v_n)}{2 - v_n} = \frac{1 - 2v_n + v_n^{\,2}}{2 - v_n} = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}.$$

Et cette égalité est vraie pour tout naturel n.

1.c.

On a: $u_0 < 1$; donc, d'après le 1.a., (v_n) est **majorée** (par 1).

Or, d'après le 1.b., (v_n) est **croissante**.

Par conséquent, (v_n) est **convergente**.

2.a. Soit n un entier naturel.

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1} - 1} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{2 - v_n} - 1} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\dfrac{1 - (2 - v_n)}{2 - v_n}} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{2 - v_n}{-1 + v_n} - \frac{1}{v_n - 1}$$

Soit: $w_{n+1} - w_n = \dfrac{2 - v_n - 1}{v_n - 1} = \dfrac{1 - v_n}{-1 + v_n} = -1$

Donc, pour tout n entier naturel, $w_{n+1} - w_n = -1$.

Et par là, (w_n) est arithmétique de raison -1.

Notons ici que $w_0 = \dfrac{1}{v_0 - 1} = \dfrac{1}{0 - 1} = -1$.

2.b. D'après le 2.a., $w_n = w_0 + n \times (-1) = -1 - n$.

Et comme $w_n = \dfrac{1}{v_n - 1}$, on obtient: $v_n = 1 + \dfrac{1}{w_n} = 1 + \dfrac{1}{-1 - n} = \dfrac{-1 - n + 1}{-1 - n} = \dfrac{-n}{-1 - n} = \dfrac{n}{n + 1}$.

Donc, pour tout naturel n, $v_n = \dfrac{n}{n + 1}$.

3

Pour lever l'indétermination, on factorise alors les termes "dominants" du quotient et on simplifie.

$$v_n = \frac{n}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Et par là: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{1 + 0} = 1.$

Exercice N°5 :

Partie A

1. Dans le triangle FBI est rectangle en B on applique le théorème de Pythagore.

$$FI^2 = BI^2 + FB^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2$$

$$= \frac{4}{9} + 1$$

$$= \frac{13}{9}$$

Dans le triangle EFJ est rectangle en E on applique le théorème de Pythagore.

$$FJ^2 = EJ^2 + FE^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2$$

$$= \frac{4}{9} + 1$$

$$= \frac{13}{9}$$

Par conséquent $FI = FJ$.
Le triangle FIJ est isocèle en F.

Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi une hauteur.
Par conséquent (FK), médiane issue du sommet F est perpendiculaire à (IJ).

2. (IJ) est orthogonale aux deux droites (FK) et (GK).
   Ce sont deux droites sécantes du plan (FGK).
   Par conséquent (IJ) est orthogonale à (FGK).

3. Par conséquent (IJ) est orthogonale à toutes les droites du plan (FGK), en particulier à (FG).
   P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ). Par conséquent (PG) est orthogonal à toutes les droites de (FIJ), en particulier à (IJ).

   Ainsi (IJ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (FGP), (FG) et (PG). Elle est donc orthogonale au plan (FGP).

4. **a.** Les plans (FGP) et (FGK) sont orthogonaux à la même droite (IJ). Ils sont donc parallèles.
   Ils ont le point F en commun : ils sont donc confondus (d'après la propriété donnée en préambule).
   Par conséquent les points F, G, K et P sont coplanaires.

   b. Par définition, les points P et K appartiennent au plan (FIJ).
   Par conséquent, les points F, P et K sont coplanaires.
   D'après la question précédente, F, G, K et P sont également coplanaires.
   Ces deux plans n'étant pas parallèles, les points F, P et K appartiennent à l'intersection de ces deux plans et sont donc alignés.

Partie B

1. Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ on a :

   $F(1;0;1) \quad G(1;1;1) \quad I\left(1;\frac{2}{3};0\right) \quad J\left(0;\frac{2}{3};1\right)$.

2. P est le projeté orthogonal de G sur (FIJ). Par conséquent (GP) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).
   Or N appartient à (GP). Ainsi (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).