Terminale	Bac blanc N°2 : Suite, Espace, Loi Binomiale	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) $\boxed{\textbf{c. } \text{(AC) et (SB)}}$ **d.** (LM) et (AD)

On procède par élimination.

- Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
- Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
- Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**

Réponse c.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I} ; \overrightarrow{\mathrm{IC}}, \overrightarrow{\mathrm{IB}}, \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{A}(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{B}(0\,;\,1\,;\,0)\,;\,\mathrm{C}(1\,;\,0\,;\,0);\mathrm{D}(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\,\mathrm{S}(0\,;\,0\,;\,1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ $\boxed{\textbf{b. } \left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)}$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

- Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Réponse b.

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\boxed{\textbf{b. } \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Réponse b.

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&-1-t\\y&=&t\\z&=&-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&-1+2t\\y&=&0\\z&=&1+2t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ $\boxed{\textbf{c. } \left\{\begin{array}{rcr}x&=&t\\y&=&0\\z&=&1+t\end{array}\right. (t\in\mathbb{R})}$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&-1-t\\y&=&1+t\\z&=&1-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$

La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}\,(1\,;\,0\,;\,1)$; la seule représentation qui convienne est la c.

Réponse c.

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ $\boxed{\textbf{b. } x+y+z-1=0}$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

On procède par élimination.

- Le plan d'équation $y+z-1=0$ ne contient pas C $(1\,;\,0\,;\,0)$; on élimine **a.**
- Le plan d'équation $x-y+z=0$ ne contient pas S $(0\,;\,0\,;\,1)$; on élimine **c.**
- Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas B $(0\,;\,1\,;\,0)$; on élimine **d.**

Réponse b.

Exercice N°2 :

1. **a.** $u_1 = u_0 + v_0 = 1+1 = 2$ et $v_1 = 2\times u_0 + v_0 = 2\times 1+1 = 3$.

   b. Pour tout n, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ donc $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.
   On a admis que la suite (u_n) était strictement positive donc, pour tout n, $u_n > 0$; on en déduit que, pour tout n, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc que la suite (v_n) est strictement croissante.
   La suite (v_n) est strictement croissante donc, pour tout n, $v_n \geqslant v_0$ donc $v_n \geqslant 1$.

   c. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant n+1$.
   On démontre cette propriété par récurrence.

   - **Initialisation**
     Pour $n=0$, $u_n = u_0 = 1$ et $n+1 = 1$ donc $u_n \geqslant n+1$; $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   - **Hérédité**
     On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on va démontrer que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
     $\mathscr{P}_n$ vraie équivaut à $u_n \geqslant n+1$.
     $u_{n+1} = u_n + v_n$; or $u_n \geqslant n+1$ et, d'après la question 1.b, $v_n \geqslant 1$. On en déduit que $u_{n+1} \geqslant n+2$ et donc que la propriété est vraie au rang $n+1$.

   - **Conclusion**
     La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n+1$.

   d. Pour tout n, $u_n \geqslant n+1$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

   a. $(-1)^{n+1}$ vaut soit -1, soit 1 selon la parité de n ; donc $-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$.
   On sait que $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$.
   On divise par u_n^2 et on obtient : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.

   b. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n^2} = 0$.
   On sait de plus que, pour tout n : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.
   Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

   c. $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2 = 2$.
   On peut en déduire que la suite (r_n) converge vers $\sqrt{2}$

   d. Pour tout entier naturel n,
   $$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n\left(2 + \dfrac{v_n}{u_n}\right)}{u_n\left(1 + \dfrac{v_n}{u_n}\right)} = \frac{2 + \dfrac{v_n}{u_n}}{1 + \dfrac{v_n}{u_n}} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

   e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
      r = (2+r)/(1+r)
      n = n+1
    return n
```

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
Elle correspond à la plus petite valeur de n pour laquelle la distance entre r_n et $\sqrt{2}$ est inférieure ou égale à 10^{-4}.

Exercice N°3 :

1) $\binom{6}{1}$ est le nombre de chemin conduisant à exactement un succès en 6 coups. Il y a 6 possibilités.
2) $\binom{7}{2} = \binom{6}{2} + \binom{6}{1} = 15 + 6 = \boxed{21}$
3) $\binom{7}{5} = \binom{7}{7-5} = \binom{7}{2} = \boxed{21}$

Exercice N°4 :