Terminale	Bac blanc N°3 : Suite, Espace, Loi Binomiale	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Exercice N°2 :

1. On veut calculer $p(X=202)=\binom{202}{202}\times 0,971^{202}\approx 0,003$

   La probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement est environ égale à $0,003$.

2. On veut calculer $p(X=201)=\binom{202}{201}\times 0,971^{201}\times(1-0,971)\approx 0,016$.

   La probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement est environ égale à $0,016$.

3. Ainsi $p(X>200)=p(X=201)+p(X=202)\approx 0,018$.
   La probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation est environ égale à $0,019$.
   Remarque : Si on n'utilise pas les arrondis précédents mais la valeur donnée directement par la calculatrice quand on calcule $p(X>200)=1-p(X\leqslant 200)$ on obtient $p(X>200)\approx 0,018$.

Exercice N°3 :

1. Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$, on a
$B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$.

2. **a.** [EG], [GD] et [ED] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc $EG=GD=ED=\sqrt{2}$: le triangle EGD est équilatéral.

b. Puisque $c=\sqrt{2}$, on a $\mathscr{A}(EGD)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_M-1\\y_M-0\\z_M-0\end{pmatrix}$.

On a donc : $x_M=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$; $y_M=\dfrac{1}{3}$; $z_M=\dfrac{1}{3}$.

Conclusion : M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

4. **a.** On a $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$: donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{EG}=-1+1+0=0$:

$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$: donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0+1-1=0$.

Conclusion : $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : c'est un vecteur normal à ce plan.

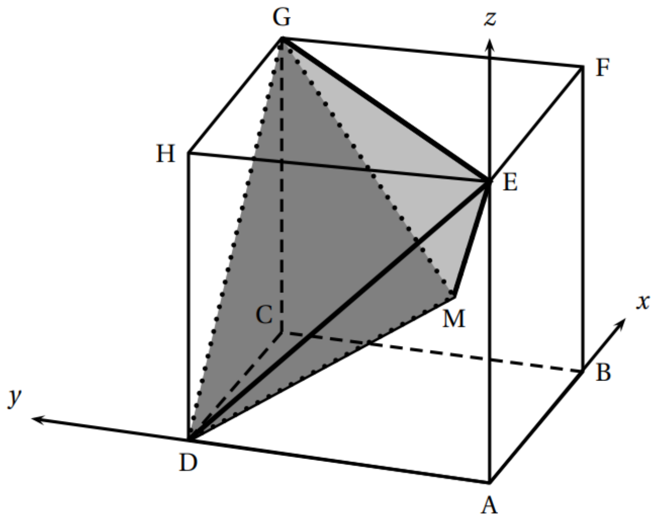
b. On sait qu'un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ a un vecteur normal de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$, donc :
$P(x\,;\,y\,;\,z)\in(EGD)\iff -x+y+z+d=0$.
Comme $E(0;0;1)\in(EGD)\iff 0+0+1+d=0\iff d=-1$.
Finalement : le plan (EGD) a pour équation $-x+y+z-1=0$.

c. La droite $\mathscr{D}$ contient M et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ vecteur normal au plan (EGD), donc avec $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} x-\frac{2}{3} \\ y-\frac{2}{3} \\ z-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$:

$P(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D} \iff \overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-\frac{2}{3} &=& -t \\ y-\frac{1}{3} &=& t \\ z-\frac{1}{3} &=& t \end{array}\right., t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{2}{3}-t \\ y &=& \frac{1}{3}+t \\ z &=& \frac{1}{3}+t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



a. On a vu que la droite $\mathscr{D}$ contient M et est perpendiculaire au plan (EBD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M. Le pied de cette hauteur K appartient donc à $\mathscr{D}$ et au plan (EGD) ; ses coordonnées vérifient donc les équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{2}{3}-t \\ y &=& \frac{1}{3}+t \\ z &=& \frac{1}{3}+t \\ -x+y+z-1 &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow -\left(\frac{2}{3}-t\right)+\frac{1}{3}+t+\frac{1}{3}+t-1=0 \iff 3t=1 \iff t=\frac{1}{3}.$$

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \\ y &=& \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\ z &=& \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Conclusion : K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

b. On en déduit $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

D'où $KM^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{3}{9}$; on en déduit $KM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Comme $\mathscr{A}(EGD) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, le volume de la pyramide GEDM est : $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{3}=\dfrac{1}{6}$.

Exercice N°4 :

1. **Initialisation :** $u_0 = 2 > 1$. La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n : $u_n > 1$
Alors

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n} = \frac{3+u_n+2u_n-2}{3+u_n}$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{2u_n-2}{3+u_n}$$

D'après l'hypothèse de récurrence : $2u_n - 2 > 0$. On a de plus $3 + u_n > 0$. Donc $u_{n+1} > 1$.
La propriété est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 0.
En la supposant vraie au rang n, elle est encore vraie au rang suivant.
Donc pour tout entier naturel, $u_n > 1$.

Remarque : ne surtout pas faire la division des 2 inégalités obtenues pour le numérateur et le dénominateur car le passage à l'inverse change le sens des inégalités !

2. **a.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

b. D'après la question $1.$ on sait que $1 - u_n < 0$. De plus $1 + u_n > 0$ et $3 + u_n > 0$
Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante.

Partie B

1.

i	1	2	3
u	$0,800$	$1,077$	$0,976$

2. Il semblerait que la suite (u_n) "oscille" autour de 1 tout en tendant vers 1.

3. **a.**

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{1 + \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}} = \frac{\dfrac{1+0,5u_n-0,5-u_n}{0,5+u_n}}{\dfrac{0,5+u_n+1+0,5u_n}{0,5+u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n} \frac{-0,5}{1,5} \times \frac{u_n-1}{1+u_n} = \frac{-1}{3}v_n$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{-1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3}$

b. Donc $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$

4. **a.** Pour tout entier naturel n on a : $\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n \leqslant 1$ donc $v_n \leqslant \dfrac{1}{3}$ et $v_n \neq 1$

b. $v_n = \dfrac{u_n-1}{1+u_n}$ donc

$$(1 + u_n)v_n = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow v_n + 1 = u_n - u_n \times v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ car $-1 < \dfrac{-1}{3} < 1$.

Par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$