Terminale	Bac blanc N°4 : Suite, Espace, Loi Binomiale	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Correction

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Avec $A(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, $B(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$, $C(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$et $D(0\ ;\ 4\ ;\ -1)$, on obtient : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$.

Pour que les points A, B, C et D soient coplanaires, il faut que (par exemple) le vecteur $\overrightarrow{AD}$ soit une combinaison linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Existe-t-il un couple de réels $(a\ ;\ b)$ tel que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB}$? Cette égalité vectorielle se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 3a+3b &= -3\\ 3a &= 6\\ 3a-3b &= -3\end{cases} \iff \begin{cases} a+b &= -1\\ a &= 2\\ a-b &= -1\end{cases} \iff \begin{cases} b &= -3\\ a &= 2\\ -b &= -3\end{cases} \iff \begin{cases} b &= -3\\ a &= 2\\ b &= 3\end{cases}$$

C'est impossible. Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ ne peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2. Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 3+3\times 0+3\times(-3) = 9-9 = 0$. Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le triangle ABC est rectangle est rectangle en A.

3. Calculons $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = (-3)\times 3+6\times 3+(-3)\times 3 = -9+18-9 = 0$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = (-3)\times 3+6\times 0+(-3)\times(-3) = -9+9 = 0$

Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il est aussi orthogonal à toute combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc orthogonal à tout vecteur du plan (ABC).

4. Les questions précédentes permettent d'affirmer que le point A est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}\times AD$.

$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\times AB\times AC = \frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6} = 27$ unités de volume.

5. Soit $H(5\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

a. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont :

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

Existe-t-il un couple de réels $(\alpha\ ;\ \beta)$ tel que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$? Cette égalité vectorielle est équivalente permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} -6\beta &= -1\\ -3\alpha+3\beta &= -1\\ -6\alpha-6\beta &= -4\end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \frac{1}{6}\\ -3\alpha &= -1-\frac{3}{6}\\ -6\alpha &= -4+1\end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \frac{1}{6}\\ -3\alpha &= -\frac{3}{2}\\ 6\alpha &= -3\end{cases}$$

$\iff \begin{cases} \beta &= \dfrac{1}{6} \\ \alpha &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Donc $\overrightarrow{BH} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{BD}$.

b. D'après la question précédente, Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux vecteurs non-colinéaires dur plan (BCD). On peut donc affirmer que le point H appartient au plan (BCD). Montrons maintenant que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan (BCD), c'est-à-dire que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à une base du plan (BCD), c'est-a-dire orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

On a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 2\times 0 + 2\times(-3) + (-1)\times(-6) = -6+6 = 0$

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DB} = 2\times(-6) + 2\times 3 + (-1)\times(-6) = -12+6+6 = 0$

Donc $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$, donc à toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs, donc à tout vecteur du plan (BCD). Donc H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

c. La distance du point A au plan (BCD) est égale à $\|\overrightarrow{AH}\|$:

$\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$ unités de longueur.

6. $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times AH$ d'où $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{3\times\mathcal{V}_{ABCD}}{AH}$.

Donc $\mathcal{A}_{AHC} = \dfrac{3\times 27}{3} = 27$ unités d'aire.

Exercice N°2 :

1. Diminuer de 10% c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,9$.

   On multiplie donc l'effectif de l'année n, u_n par 0,9 puis on augmente cet effectif de 100 : on a donc

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. • $u_0 = 2000$,d'où $u_1 = 0,9\times 2000 + 100 = 1800 + 100 = 1900$;
   • $u_1 = 1900$,d'où $u_2 = 0,9\times 1900 + 100 = 1710 + 100 = 1810$.
3. *Initialisation* : $1000 < 1900 \leqslant 2000$, soit $1000 < u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang $n = 0$.

   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

   En multipliant chaque membre par 0,9, on obtient : $0,9\times 1000 < 0,9\times u_{n+1} \leqslant 0,9\times u_n$ puis en ajoutant 100 à chaque membre on obtient :

   $900 + 100 < 0,9u_{n+1} + 100 \leqslant 0,9u_n + 100$, soit :

   $1000 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

   L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il l'est encore au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
4. La récurrence précédente montre que :

   — la suite (u_n) est décroissante $(u_{n+1} \leqslant u_n)$;

   — la suite (u_n) est minorée par 1000

   La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.

a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$, soit $v_{n+1} = 0,9u_n + 100 - 1000$, ou encore $v_{n+1} = 0,9u_n - 900 = 0,9(u_n - 1000)$ et enfin :

$$v_{n+1} = 0,9v_n.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) rdt une suite géométrique de raison 0,9.

b. On a donc $v_0 = u_0 - u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$.

On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ (avec $q = 0,9$), soit $v_n = 1000 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 1000 \iff u_n = v_n + 1000$, soit $u_n = 1000 \times 0,9^n + 1000 = 1000(1 + 0,9^n)$.

c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 0,9^n = 1$ et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1000.$$

Cela signifie qu'au bout de nombreuses années la population va se rapprocher de 1 000 individus.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).

a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1020$.

On a $u_n \leqslant 1020 \iff 1000(1 + 0,9^n) \leqslant 1020 \iff 1000 + 1000 \times 0,9^n \leqslant 1020$

$\iff 1000 \times 0,9^n \leqslant 20 \iff 0,9^n \leqslant 0,02 \iff n \ln 0,9 \leqslant \ln 0,02 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9}$

(car $\ln 0,9 < 0$).

La calculatrice donne $\dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9} \approx 37,1$, donc le plus petit entier tel que $u_n \leqslant 1020$ est $n = 38$ ($u_{38} \approx 1018,25$).

b.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while u >1 020 :
    u= 0.9*u+100
    n = n + 1
  return n
```

Exercice N°3 :

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

Le nombre de coyotes est assez important pour que toutes les captures indépendantes sont celles d'animaux dont la probabilité de positivité au test est de 0,694. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $P = 0,694$.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

On sait que $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1 - 0,694)^{5-1} \approx 0,030$ soit 0,03 au centième près.

c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

On vérifie si effectivement $P(X \geqslant 4) > \dfrac{1}{2}$.

Or $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$;

$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,694^4 \times 0,306^1 \approx 0,3549$ et

$P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,694^5 \times 0,306^0 \approx 0,1609$

Donc $P(X \geqslant 4) \approx 0,3549 + 0,3549$, soit $P(X \geqslant 4) \approx 0,5158$ valeur supérieure à 0,5 : le vétérinaire a raison.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?

Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(Y \geqslant 1) > 0,99$ avec Y variable aléatoire associée au nombre de coyotes ayant un test positif.

Or $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,694^0 \times 0,306^n = 1 - 0,306^n$. Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,306^n$

Par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 > n \ln 0,306 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,306} < n$ car $\ln 0,306 < 0$.

Comme $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,306} \approx 3,9$: il faut donc capturer au moins 4 coyotes.