Terminale	Correction Série 2 : Limites et continuité	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

1. $\lim_{x\to+\infty} x^2-3x = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ d'après la limite des termes de plus haut degré.
   $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
   Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. $\lim_{x\to-1^+} 1-x = 2$ et $\lim_{x\to-1^+} = 0^+$ par conséquent $\lim_{x\to-1^+} \frac{1-x}{1+x} = +\infty$.
   $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
   Donc $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$
   $\lim_{x\to1} \sqrt{x} = 1$ donc $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.
   De plus $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$
   Donc par produit, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exercice N°2 :

1. Nous sommes en présence de la forme indéterminée "$\infty-\infty$". Pour lever cette indétermination, nous allons utiliser l'expression conjuguée.

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$$

$$= \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) \times \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$
Donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} = +\infty$
Par conséquent $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0$

2. On procède de la même manière. Pour $x > 0$

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x}-x$$

$$= \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right) \times \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$= \frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$= \frac{4x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{4}{x}} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x}-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} = \frac{4}{2} = 2$

La ligne 4 étant de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ nous sommes encore en présence d'une forme indéterminée.

3. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$ s'annulent en -2. On va donc factoriser chacune de ces expressions par $x-(-2)=x+2$.
   Cherchons dans un premier temps des réels b et c tels que :
   $x^3+2x^2-x-2 = (x+2)(x^2+bx+c)$

   $$= x^3+2bx^2+cx+2x^2+2bx+2c\,.$$

   $$= x^3+(2b+2)x^2+(c+2b)x+2c$$

   Procédons maintenant par identification :
   $$\begin{cases} 2b+2=2 \\ c+2b=-1 \\ 2c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-1 \end{cases}$$
   Ainsi $x^3+2x^2-x-2 = (x+2)(x^2-1)$

   Factorisons maintenant le dénominateur :
   $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

   Ainsi, pour $x \neq -2$, on a $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x^2-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-1}{x-2}$.
   Donc :
   $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2-1}{x-2} = -\frac{3}{4}$

4. De nouveau le numérateur et le dénominateur s'annulent en 3. On va donc de nouveau factoriser ces expressions.
   $\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{x}-\sqrt{3}^2}{x-3}$

   $$= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x-3}$$

   $$= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} \quad x \neq 3$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x}-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2}$$

Exercice N°3 :

Sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, on $f(x) \leqslant -5$. Par conséquent, sur cet intervalle, l'équation $f(x)=0$ ne possède pas de soution.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.

$f(-2)=-8$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$. Or $0 \in]-8;5[$.

Par conséquent, d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur $]-2;+\infty[$.

Par conséquent, l'équation $f(x)=0$ ne possède qu'une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice N°4 :

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-2[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ et $f(-2)=2$. Or $0 \in]-1;2[$.

D'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur $]-\infty;-2[$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-2;4]$.

$f(-2)=2$ et $f(4)=-3$. Or $0 \in]-3;2[$.

D'après le théorème de la bijection l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur $]-2;4[$.

Sur $[4;+\infty[$ on a $f(x) \leqslant -1$.

L'équation $f(x)=0$ ne possède donc pas de solution sur $]4;+\infty[$.

On déduit de cette étude que l'équation $f(x)=0$ possède donc deux solutions sur $\mathbb{R}$ (on a en prime des intervalles dans lesquelles elles se trouvent).

Exercice N°5 :

Pour tout $x \in]-\infty;-3[\cup]-3;5[$, on a $f(x)<1$. L'équation $f(x)=1$ ne possède donc aucune solution sur cette réunion d'intervalles.

On a $f(-3)=1$. -3 est donc une solution de l'équation $f(x)=1$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[5;+\infty[$.

$f(-5)=-3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Or $1 \in]-3;+\infty[$.

D'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $f(x)=1$ possède une unique solution sur $[5;+\infty[$.

L'étude précédente nous permet donc de dire que l'équation $f(x)=1$ possède deux solutions sur $\mathbb{R}$: -3 et un réel appartenant à $]5;+\infty[$.

Exercice N°6 :

1. La fonction f est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x)=3x^2-2x+1$
   Étudions le signe de cette expression : $\Delta=(-2)^2-4\times 3=-8<0$
   Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de 3 et $f'(x)>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

   D'après la limite des termes de plus haut degré on a :
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

2. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$.
   De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
   Par conséquent, d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

3. A l'aide du mode *table* de la calculatrice, on obtient : $-0,82<\alpha<-0,81$.

Exercice N°7 :

1. D'après la limite des termes de plus haut degré on a :
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{3}=-\infty$ et
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{3}=+\infty$

2. La fonction f est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x)=2x^2-x-1$$

   Étudions le signe de cette expression : $\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-1)=9>0$.
   Elle possède donc deux racines : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{9}}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{9}}{4}=1$.
   On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{79}{24}$	$\searrow$	$\frac{13}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour tout $x \geqslant -\frac{1}{2}$, on a $f(x) \geqslant \frac{13}{6} > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution sur $[-1; +\infty[$.

4. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{79}{24}$. Or $0 \in \left]-\infty; \frac{79}{24}\right[$.
   D'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$.

   L'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution sur $\mathbb{R}$.

5. En utilisant le menu *table* de la calculatrice on trouve $-1,70 < \alpha < -1,69$

Exercice N°8 :

1. La fonction g est une somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$. Elle est donc également dérivable sur cet intervalle.

$$g'(x) = \frac{18}{2\sqrt{x}} - 6 = \frac{9}{\sqrt{x}} - 6 = \frac{9 - 6\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

   $g'(x)$ est donc du signe de $9 - 6\sqrt{x}$.
   Or
   $$\begin{aligned} 9 - 6\sqrt{x} > 0 &\Leftrightarrow 9 > 6\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{6} > \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} > \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{4} > x > 0 \end{aligned}$$

   On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	15	$\nearrow$	$\frac{57}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = 15 \quad g\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{57}{2}$

$g(x) = x\left(18\dfrac{\sqrt{x}}{x} - 6 + \dfrac{15}{x}\right) = x\left(18\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 6 + \dfrac{15}{x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15}{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 18\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 6 + \dfrac{15}{x} = -6$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2. Sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{9}{4}\right]$ on a $g(x) \geqslant 15$. Par conséquent l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

   La fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{9}{4}; +\infty\right[$.

   De plus $g\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{57}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Donc $0 \in \left]-\infty; \dfrac{57}{2}\right[$.
   D'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $g(x) = 0$ possède donc une unique solution.

   Finalement, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0; +\infty[$.

3. A l'aide du menu *table* de la calculatrice on trouve $13,53 < \alpha < 13,54$.

4. Cela signifie donc que :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

5. La fonction f est une somme et un produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.
   On a :
   $$f'(x) = 9 - 2\sqrt{x} + \frac{15-2x}{2\sqrt{x}}$$
   $$= \frac{18\sqrt{x} - 4x + 15-2x}{2\sqrt{x}}$$
   $$= \frac{18\sqrt{x} - 6x + 15}{2\sqrt{x}}$$
   $$= \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

6. Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que de celui de $g'(x)$ (que nous avons étudié à la question 3).
   On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = 0$

$$f(x) = 9x + (15 - 2x)\sqrt{x}$$

$$= 9x + 15\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}$$

$$= x\sqrt{x}\left(\frac{9x}{x\sqrt{x}} + \frac{15\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - 2\right)$$

$$= x\sqrt{x}\left(\frac{9}{\sqrt{x}} + \frac{15}{x}-2\right)$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$