Terminale | **Correction Série 1** : Limites des fonctions | OMRI Rafik

Exercice N°1 :

1. $\lim\limits_{x\to -3^+}(-2x-6)=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{-2x-6}=-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty.$
   De plus $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-3)=-3.$
   Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-3)\right)=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 3^+}(1-4x)=-11$ et $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)=0^+$ donc
   $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1-4x}{x-3}=-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to 2^-}x^3=8$ et $\lim\limits_{x\to 2^-}(4-2x)=0^+$ donc
   $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3}{4-2x}=+\infty$

5. $\dfrac{\sqrt{x}+2-3x}{x}=\dfrac{x\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}+\dfrac{2}{x}-3\right)}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x}-3.$
   Or $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x}=0$
   Par conséquent $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}+2-3x}{x}=-3$

6. $\dfrac{2x+5}{\sqrt{-x}}=\dfrac{2x}{\sqrt{-x}}+\dfrac{5}{\sqrt{-x}}=-2\sqrt{-x}+\dfrac{5}{\sqrt{-x}}.$
   Or $\lim\limits_{x\to -\infty}-2\sqrt{-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5}{\sqrt{-x}}=0.$
   Par conséquent $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{-x}}=-\infty$

7. $\lim\limits_{x\to -2^-}-2x=4$ et $\lim\limits_{x\to -2^-}(3x+6)=0^-$
   Donc $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{-2x}{3x+6}=-\infty$

Exercice N°2 :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x}=0^+$ d'après la limite du quotient des termes de plus haut degré.

2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x}=0^-$ d'après la limite du quotient des termes de plus haut degré.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x(-x-1)}{(x^2+2)(x+3)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4x^2-4x}{x^3+3x^2+2x+6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4x^2}{x^3} = \dfrac{-4}{x} = 0^-$ d'après la limite du quotient des termes de plus haut degré.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{(x+2)(x-5)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-3x-10} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ d'après la limite du quotient des termes de plus haut degré.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2+5x-1}{4x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2}{4x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{4}$ d'après la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Exercice N°3 :

1. On constate que le numérateur et le dénominateur vont tendre vers 0. Tel quel, on est en présence d'une forme indéterminée.
   Essayons de factoriser $-2x^2-x+3$. $\Delta = 1+24 = 25 > 0$.
   Il y a donc deux racines réelles. $x_1 = \dfrac{1–5}{-4} = 1$ et $\dfrac{1+5}{-4} = -\dfrac{3}{2}$.
   Ainsi $\dfrac{-2x^2-x+3}{x-1} = \dfrac{-2(x-1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{x-1} = -2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ pour tout $x \neq 1$.
   Donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2x^2-x+3}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} -2\left(x+\dfrac{3}{2}\right) = -5$

2. On constate que le numérateur et le dénominateur vont tendre vers 0.
   $\dfrac{x^2+4x}{-x^2-2x+8} = \dfrac{x(x+4)}{-(x-2)(x+4)} = \dfrac{-x}{x-2}$ pour $x \neq -4$
   Par conséquent $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2+4x}{-x^2-2x+8} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{-x}{x-2} = -\dfrac{2}{3}$

3. On constate encore une fois que le numérateur et le dénominateur vont tendre vers 0.
   $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}–\sqrt{x}} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)(x+2)}{\sqrt{2}–\sqrt{x}} = -\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)(x+2)$ pour tout $x \neq 2$.
   Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}–\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 2^+} -\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)(x+2) = -8\sqrt{2}$

4. Là encore, on constate que le numérateur et le dénominateur vont tendre vers 0.
   $\dfrac{\sqrt{9-x}}{x^2-81} = \dfrac{\sqrt{9-x}}{(x–9)(x+9)} = \dfrac{-1}{(x+9)\sqrt{9–x}}$ pour $x \neq 9$.
   Donc $\lim\limits_{x \to 9^-} \dfrac{\sqrt{9-x}}{x^2-81} = \lim\limits_{x \to 9^-} \dfrac{-1}{(x+9)\sqrt{9–x}} = -\infty$

Exercice N°4 :

Étudions tout d'abord les limites en $\pm\infty$.

D'après la limite du quotient des termes de plus haut degré :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

La courbe représentative de la fonction f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Étudions maintenant les limites en -2

$\lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 + 5x + 1) = -5$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} x^2 + x - 2 = 0^+$

Donc $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

On obtient de même que $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

Étudions enfin les limites en 1

$\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + 5x + 1 = 8$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + x - 2 = 0^-$

Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

On obtient de même que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Ainsi la courbe représentative de f possède également deux asymptotes verticales d'équation $x = 1$ et $x = -2$.

Exercice N°5 :

1. D'après la limite du quotient des termes de plus haut degré on a :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$
   De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

   Par conséquent $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = 3$
2. Étudions le signe de $f(x) - 3$
   $$f(x) - 3 = \frac{3x^2 - 4}{x^2 - 1} - 3$$
   $$= \frac{3x^2 - 4 - 3^{(x^2-1)}}{x^2 - 1}$$
   $$= \frac{-1}{x^2 - 1}$$
   $x^2 - 1$ est positif sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et négatif sur $]-1; 1[$.

   Par conséquent $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'asymptote horizontale sur $]-1; 1[$ et au-dessous sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

3. $\lim\limits_{x \to 1^-} 3x^2 - 4 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 1 = 0^-$.
   ıent $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x \to 1^+} 3x^2 - 4 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 1 = 0^+$.
   Par conséquent $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

4. On en déduit donc que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5. $\lim\limits_{x \to -1^-} 3x^2 - 4 = -1$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} x^2 - 1 = 0^+$.
   Par conséquent $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

   $\lim\limits_{x \to -1^+} 3x^2 - 4 = -1$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} x^2 - 1 = 0^-$.
   Par conséquent $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

   $\mathscr{C}_f$ possède donc une seconde asymptote verticale d'équation $x = -1$.