1 Rappels

1.1 Définitions

Expérience aléatoire : Protocole précis dont on ne peut prévoir l'issue mais qui peut être vérifiée.

Exemples :

1) Lancer un dé à 6 faces.
2) Tirer simultanément 2 boules dans une urne qui en contient 8.
3) Distribuer 5 cartes à un joueur avec un jeu de 32 cartes.
4) Poser une question à un lycéen choisi au hasard.

Univers : Ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note : Ω. On a alors : $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Exemple : Si on lance un dé à six faces, on a : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Événement : Sous ensemble de l'ensemble univers Ω.

Exemple : Soit l'événement : « obtenir un nombre pair avec le lancement d'un dé ». On a alors : $E = \{2, 4, 6\}$

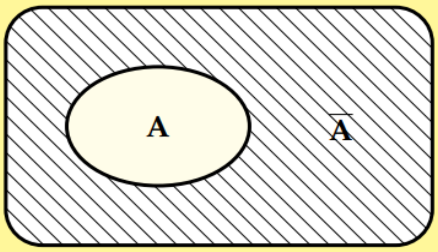
Événement élémentaire : Événement qui ne contient qu'un seul élément. On le note alors e_i.

Événement certain : C'est l'univers, Ω.

Événement impossible C'est l'ensemble vide, $\varnothing$.

1.2.1 Événement contraire

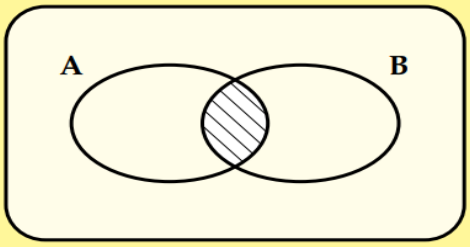
Définition 1 : On appelle événement contraire d'un événement A, l'événement noté $\overline{A}$ composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.



$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Omega \quad \text{et} \quad x \notin A$$

1.2.2 Intersection de deux événements

Définition 2 : On appelle l'intersection de deux événements A et B, l'événement noté $A \cap B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A et à B. On a alors le schéma suivant :

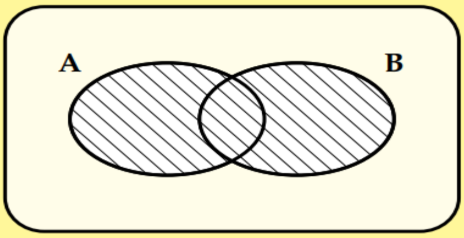


$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$ et $x \in B$

On dit que les événements A et B sont **incompatibles** si et seulement si : $A \cap B = \varnothing$

1.2.3 Union de deux événements

Définition 3 : On appelle union de deux événements A et B, l'événement noté $A \cup B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A ou (non exclusif) à B. On a alors le schéma suivant :



$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$ ou $x \in B$

On dit que les événements A et $\overline{A}$ forment une **partition** de Ω car : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$

1.3 Probabilité

Définition 4 : On appelle loi de probabilité sur un ensemble Ω, la fonction P à valeur dans $[0;1]$ définie par les conditions suivantes :

1) $P(\Omega) = 1$
2) Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriété 1 : Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les n événements élémentaires de l'univers Ω. De la définition précédente, on en déduit :

1) $P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1$
2) $P(\varnothing) = 0$
3) Pour tous événements A et B, on a les relations :
   a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
   b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Théorème 1 : Dans une loi équirépartie, la probabilité de l'événement A vérifie :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

2 Probabilité conditionnelle

2.1 Définition

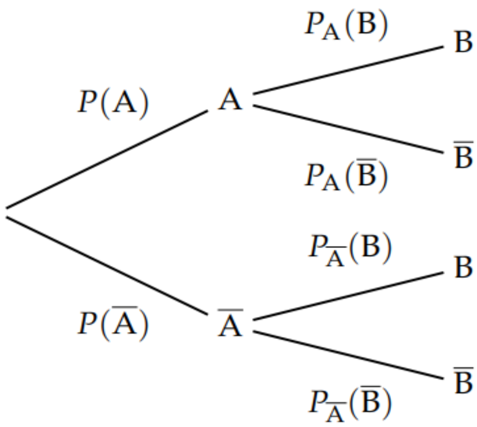
Le but de ce paragraphe est d'étudier la probabilité d'un événement B conditionné par un événement A.

Définition 8 : Lorsque $P(\mathrm{A}) \neq 0$, on note $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ la probabilité d'avoir l'événement B sachant que l'événement A est réalisé. On a alors la relation suivante :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

2.2 Représentation par un arbre pondéré

Soient deux événements A et B. On peut représenter par un arbre pondéré les probabilités suivantes lorsque l'on connaît les probabilités de B ou $\overline{\mathrm{B}}$ lorsque A est réalisé.



Théorème 2 : **Probabilités totales**

Soit $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ une partition de l'univers Ω (ensembles deux à deux incompatibles et dont l'union forme Ω), alors, pour tout événement B, on a :

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + \cdots + P(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B})$$

2.3 Événements indépendants

Définition 9 : On dit que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) \quad \text{ou lorsque } P(\mathrm{A}) \neq 0 \quad P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$$

3 Loi binomiale

3.1 Conditions

Épreuve de Bernoulli : expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : succès ou échec. On appelle p la probabilité de succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'échec.

Schéma de Bernoulli d'ordre n : expérience aléatoire qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
On définit alors la variable aléatoire X représentant le nombre de succès.

3.2 Loi binomiale de paramètres n et p

Théorème 4 : Dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre de succès est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$

Remarque :

- $\binom{n}{k}$ est un coefficient binomial.
  Il correspond au nombre de possibilités de placer k succès sur n expériences.
- Pour le calculer avec la calculatrice : taper n puis aller dans math, onglet PRB puis choisir 3 : Combinaison, taper enfin k.
  Par exemple pour calculer $\binom{10}{4}$: 10 Combinaison 4 . On trouve 210.

3.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Théorème 5 : Pour tous entiers naturels n et k, tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

4) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

3.5 Espérance et variance

Théorème 6 : X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, alors l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$, la variance $\mathrm{V}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ sont égales à :

- $\mathrm{E}(X) = np$
- $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$