Terminale	**Cours** : Vecteurs, droites et plans l'espace	OMRI Rafik

Remarques

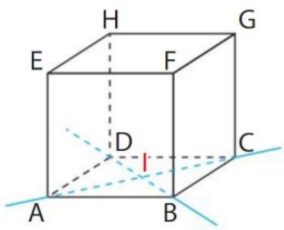
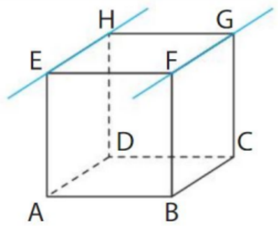
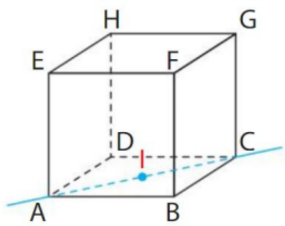
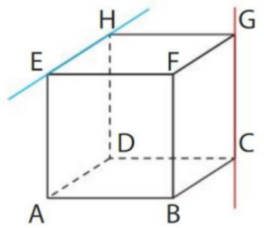
- Par **2 points distincts** de l'espace, passe une **unique droite**.
- Par **3 points non alignés** de l'espace, passe **un unique plan**.
- Si un plan contient 2 points distincts A et B, il contient la droite (AB).
- Par convention, une droite se note avec 2 points et un plan par trois points. Par exemple on parlera de la droite (AB) et du plan (ABC) ou plus simplement de (AB) et (ABC).

I Droites et plans de l'espace : positions relatives

I.1 Positions relatives de deux droites

Propriété 1

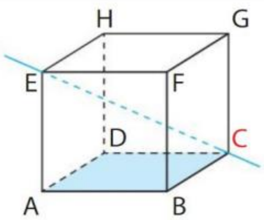
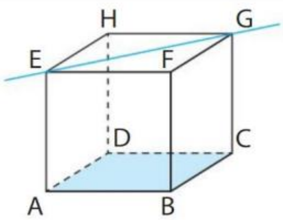
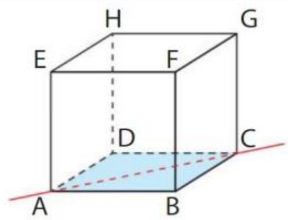
1. **Deux droites** sont soit **coplanaires**, soit **non coplanaires**.
2. Si elles sont coplanaires, elles sont soit sécantes soit parallèles.

Droites coplanaires (dans un même plan)			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles		
 Les droites (AC) et (DB) sont sécantes en I.	 Les droites (EH) et (FG) sont strictement parallèles.	 Les droites (AI) et (AC) sont confondues.	 Les droites (EH) et (GC) sont non coplanaires.

I.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété 2

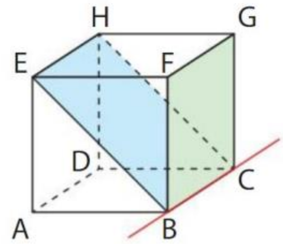
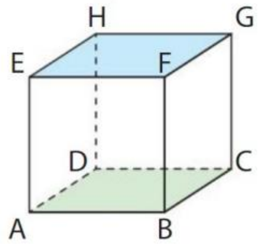
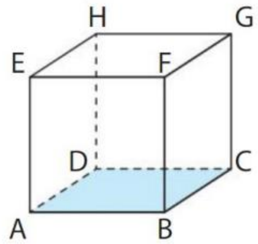
Une droite et un plan de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
 La droite (EC) et le plan (ABC) sont sécants en C.	 La droite (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.	 La droite (AC) est contenue dans le plan (ABC).

I.3 Positions relatives de deux plans

Propriété 3

Deux plans de l'espace sont soit **sécants suivant une droite**, soit **parallèles**.

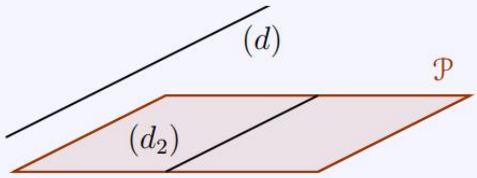
Plans sécants	Plans parallèles	
 Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants suivant la droite (BC).	 Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.	 Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus.

II Parallélisme

II.1 Droite parallèle à un plan

Propriété 4 (Parallélisme d'une droite et d'un plan)

Si une droite (d) est parallèle à une droite (d_2) d'un plan $(\mathscr{P})$, alors la droite (d) est parallèle au plan $(\mathscr{P})$.



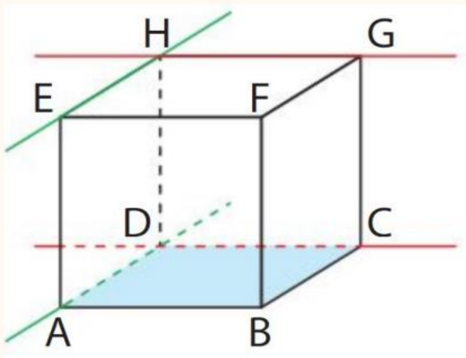
Exemple

- Dans le cube ci-contre, la droite (HG) est parallèle à la droite (DC) donc elle est parallèle au plan (ADC).

$$\begin{cases}(HG)//(DC) \\ (DC) \in (ADC)\end{cases} \Longrightarrow (HG)//(ADC)$$

- Dans le cube ci-contre, la droite (EH) est parallèle à la droite (AD) donc elle est parallèle au plan (ADC).

$$\begin{cases}(EH)//(AD) \\ (AD) \in (ADC)\end{cases} \Longrightarrow (AH)//(ADC)$$



II.2 Parallélisme de deux droites

Plusieurs méthodes pour montrer que deux droites de l'espace sont parallèles.

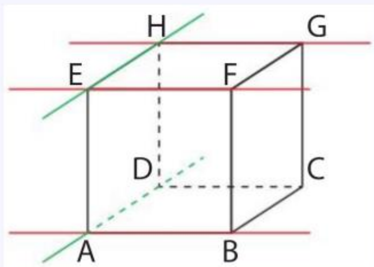
II.2.1 Deux droites parallèles à une 3e

Propriété 5 (2 droites // à une 3e)

Si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Par exemple ici :

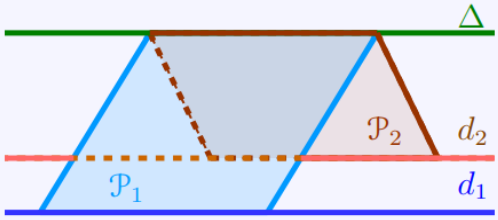
- Les droites (AB) et [HG] sont parallèles à la droite (EF) donc elles sont parallèles entre elles.



II.2.2 Théorème du toit : 1ère formulation

Théorème 1 (Théorème du toit (1))

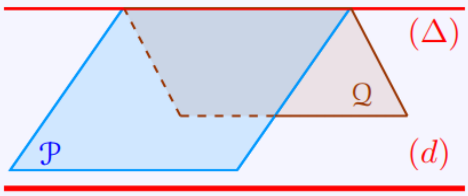
Soit (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en (Δ) qui est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).



II.2.3 Théorème du toit : 2e formulation

Théorème 2 (Théorème du toit (2))

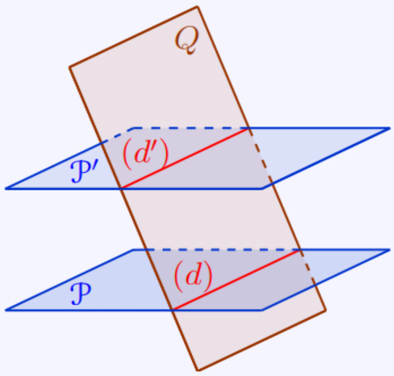
Si une droite (d) est parallèle à deux plans sécants, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ alors (d) est parallèle à (Δ), la droite d'intersection des deux plans .



II.2.4 Deux plans // coupés par un 3ème

Théorème 3 (Parallélisme de deux droites)

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles, tout plan $\mathcal{Q}$ qui coupe le plan $\mathcal{P}$, coupe aussi le plan $\mathcal{P}'$ et les droites d'intersection (d) et (d') sont parallèles.



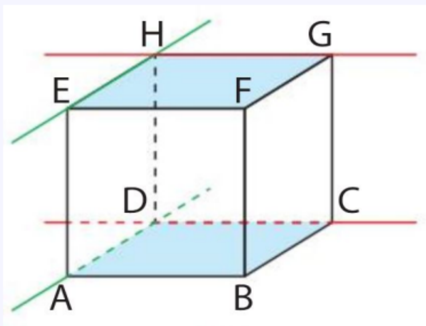
II.3 Parallélisme de deux plans

Propriété 6

Deux **plans sont parallèles** si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

Par exemple ici :

- Les droites (HG) et (DC) sont parallèles ;
- Les droites (AD) et (EH) sont parallèles ;
- Les deux droites (AD) et (DC) sécantes du plan (ADC) sont donc parallèles aux deux droites (EH) et (EH) sécantes du plan (EHG)
- <u>Conclusion</u> : les plans (ADC) et (EHG) sont parallèles.



III Vecteurs de l'espace

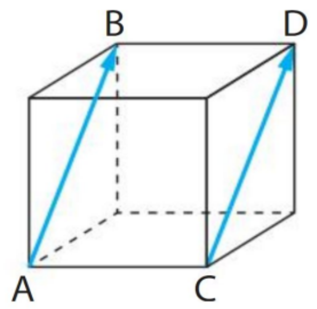
III.1 Notion de vecteur de l'espace

Définition 1 (Vecteurs égaux)

Deux vecteurs de l'espace non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

On peut noter $\overrightarrow{u}$ ce vecteur qui admet une infinité de représentant (ayant même norme (longueur), direction et sens) :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \cdots$$



III.2 Vecteurs coplanaires

Définition 2 (Vecteurs coplanaires)

1. **Des vecteurs (2 ou plus)** sont **coplanaires** si en traçant leurs représentants à partir d'un même point A (quelconque), leurs extrémités sont coplanaires avec A.
2. **Deux vecteurs (2 seulement)** sont **toujours coplanaires**.

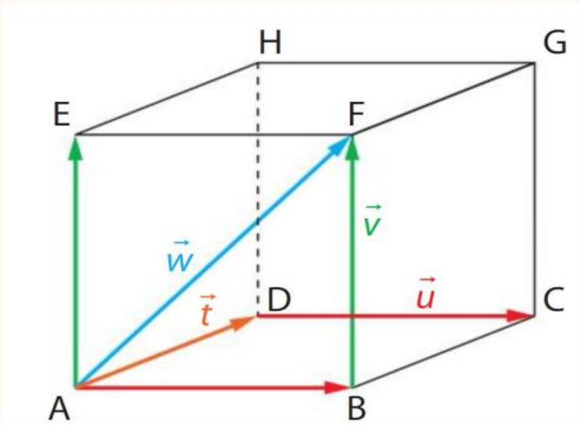
Exemple

On considère le cube ci-contre.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AF}$ sont coplanaires car on a aussi :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AF} \end{cases}$$

et les points A, B, E et F sont dans le plan (ABE).



2. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires car on a aussi :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{t} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

et l'unique plan contenant les points A, B, E est (ABE) qui ne contient pas le point D.

3. **Attention**, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires , puisque 2 vecteurs le sont toujours, mais les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires !

III.3 Opérations sur les vecteurs

Deux vecteurs étant toujours coplanaires, on définit dans l'espace, la somme de deux vecteurs, le produit d'un vecteur par un réel, la colinéarité comme dans le plan.

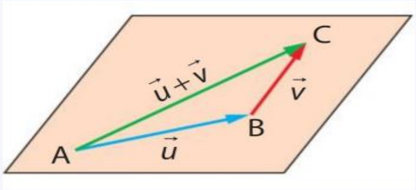
Propriété 7

Pour k et k' réels on a :

- $k\left(k'\overrightarrow{u}\right) = kk'\overrightarrow{u}$
- $(k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$

Relation de **Chasles**

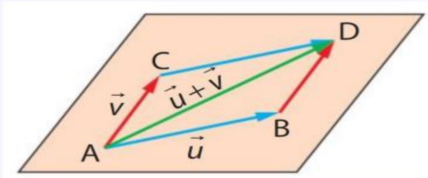
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Règle du **Parallélogramme**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

ABDC parallélogramme



IV Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace

Propriété 8 (Droite définie par un point et un vecteur directeur ou 2 points)

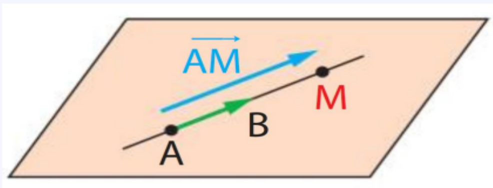
Soit A et B deux points distincts de l'espace.

1. Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.
2. La droite (AB) est donc définie comme l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ soit :

$$\boxed{(AB) = \left\{M\ ;\ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}\ ,\ t \in \mathbb{R}\right\}}$$

3. La droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est donc définie comme l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ soit :

$$\boxed{(d) = \left\{M\ ;\ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}\ ,\ t \in \mathbb{R}\right\}}$$



V Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

V.1 Caractérisation d'un plan

Propriété 9 (Plan défini par 3 points ou 1 point et 2 vecteurs non colinéaires)

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

1. Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe des réels x et y tels que :

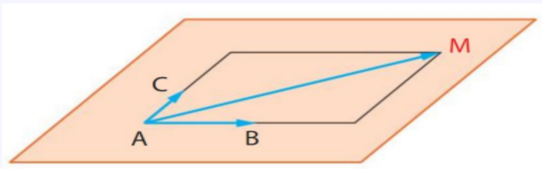
$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$$

2. Le plan (ABC) est donc défini comme l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$$

soit :

$$\boxed{(ABC) = \left\{M\ ;\ \overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}\ ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$



3. Le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est donc défini comme l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v}$$

soit :

$$\boxed{(\mathcal{P}) = \left\{M\ ;\ \overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v}\ ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Preuve

- Si le point M appartient au plan (ABC).
  Les points A, B et C n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan (ABC).
  Dans ce repère du plan, le point M est de coordonnées $(x\ ;\ y)$ avec :
$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$$
- Réciproquement, si le point M est le point de l'espace défini par :
$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}\ \ ,\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$
  Notons N le point du plan (ABC) de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère du plan $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$.
  On a alors :
$$\overrightarrow{AN} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$$
  et donc les points M et N sont confondus.
  De ce fait le point M appartient au plan (ABC).

V.2 Propriétés

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 10

Deux plans dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Propriété 11

Soit deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existent des réels x et y tels que :
$$\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v}$$

Preuve

- Soit deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
  Soit A un point de l'espace et B, C et D les points tels que :
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$$
- Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés et ils définissent le plan (ABC).
- Or $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B, C et D sont coplanaires, ce qui implique que le point D appartient au plan (ABC) soit
$$\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}\,,\overrightarrow{w}\ \text{coplanaires} \iff D\in(ABC) \iff \overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}\ ,\ (x\ ;\ y)\in\mathbb{R}^2$$
- Pour conclure :
$$\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}\,,\overrightarrow{w}\ \text{coplanaires} \iff \overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v}\ ,\ (x\ ;\ y)\in\mathbb{R}^2$$

VI Repères de l'espace

- Dans le **plan**, on peut décomposer tout vecteur en **2 vecteurs non colinéaires**.
- Dans l'**espace**, on peut décomposer tout vecteur en **3 vecteurs non coplanaires**.

VI.1 Décomposer un vecteur de l'espace

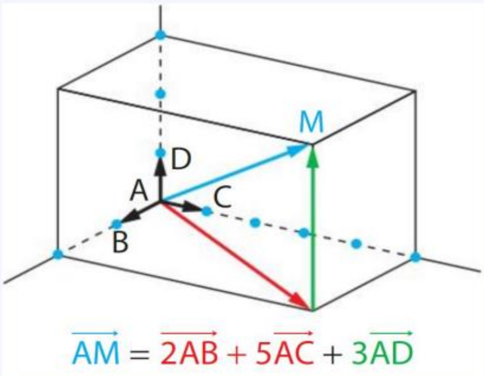
Propriété 12

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace.
Pour tout point M de l'espace :

1. Il existe des réels x, y, z tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} + z\,\overrightarrow{AD}$$

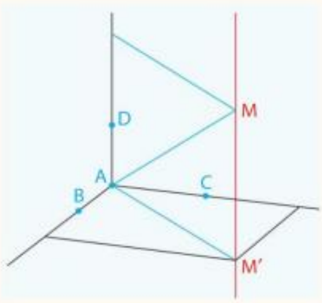
2. ce triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est unique.



Preuve

1. **Existence**.

   - Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace et M un point de l'espace.
     A, B, C, D ne sont pas coplanaires donc la droite (AD) coupe le plan (ABC) et donc la parallèle à (AD) passant par M coupe aussi le plan (ABC) en un point M'.



   - $M' \in (ABC)$ donc il existe des réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AM'} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$$

   - (M'M) est parallèle à (AD) donc les vecteurs $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et il existe un réel $z$tel que $\overrightarrow{M'M} = z\,\overrightarrow{AD}$.
   - D'après Chasles on en déduit que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} + z\,\overrightarrow{AD}$$

2. **Unicité**.
   Nous allons effectuer un raisonnement par l'absurde.

   - Supposons qu'il existe deux triplets $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} + z\,\overrightarrow{AD} = x'\,\overrightarrow{AB} + y'\,\overrightarrow{AC} + z'\,\overrightarrow{AD}$$

- On a alors :

$$(x - x')\,\overrightarrow{AB} = (y' - y)\,\overrightarrow{AC} + (z' - z)\,\overrightarrow{AD}$$

- Si $x \neq x'$ alors :

$$\overrightarrow{AB} = \frac{y' - y}{x - x'}\,\overrightarrow{AC} + \frac{z' - z}{x - x'}\,\overrightarrow{AD}$$

Ce qui implique que le point B appartient au plan (ACD) d'après la propriété 9 page 6.
Cela est contradictoire avec la donnée initiale : "*Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace*"

- De ce fait on a $x = x'$ ce qui implique :

$$\overrightarrow{0} = (y' - y)\,\overrightarrow{AC} + (z' - z)\,\overrightarrow{AD}$$

Ce qui implique que les 3 points A, C et D sont alignés ce qui est encore contradictoire avec la donnée initiale car dans ce cas, les points A, B, C et D seraient coplanaires.

3. **Conclusions** : Si A, B, C et D sont quatre points non coplanaires de l'espace. Pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que :

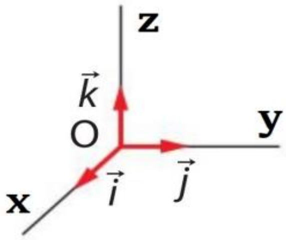
$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} + z\,\overrightarrow{AD}$$

VI.2 Repérage de l'espace

Définition 3

Un repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace est formé :

1. d'un point O origine du repère ;
2. d'un triplet $\left(\overrightarrow{\imath}\ ;\ \overrightarrow{\jmath}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires.

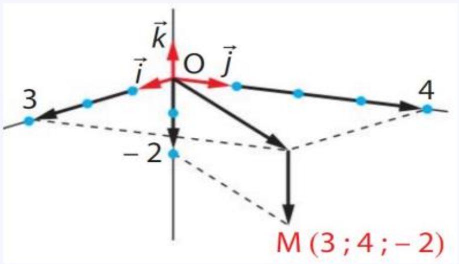


Propriété 13 (Coordonnées d'un point de l'espace)

Soit un repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k}$$

On note alors : $M(x\,;\,y\,;\,z)$.



Propriété 14 (Coordonnées d'un vecteur de l'espace)

Soit un repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels tels que :

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

On note alors :

$$\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y\,;\,z) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Propriété 15

Soit un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$ de l'espace. Soit k et k' des réels et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur somme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est de coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$.
2. Le vecteur $\vec{b} = k\,\vec{u}$ est de coordonnées $\vec{b}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$.
3. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
4. Si $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$.
5. Le milieu I du segment [AB] est de coordonnées, la moyenne de celles de A et de B soit

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

VII Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

On a vu lors de la propriété 8 page 6 que la droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est donc définie comme l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$ soit :

$$(d) = \left\{M\ ;\ \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}\ ,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

Dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$ de l'espace, si $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ on obtient en passant aux coordonnées :

$$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} \iff \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ta\\tb\\tc\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x-x_A = at\\ y-y_A = bt\\ z-z_A = ct\end{cases}$$

Propriété 16 (Représentation paramétrique d'une droite de l'espace)

Soit un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$ de l'espace.

La droite (d) passant par le point $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est l'ensemble des point $M\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que :

$$\boxed{\begin{cases}x = x_A + a\,t\\ y = y_A + b\,t\\ z = z_A + c\,t\end{cases}\quad ,\ t \in \mathbb{R}}$$

Ce système d'équations est appelé **une représentation paramétrique de la droite (d)**.

Remarques

- Il n'y a pas unicité, pour s'en convaincre il suffit de remplacer t pat $2t'$ ou par $t'+1$.
- On obtient plusieurs représentations paramétriques de la droite (d).
  Elle dépend du point A et du vecteur directeur.

Exemple

1. La droite (d1) passant par le point $A\,(1\ ;\ 0\ ;\ -3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix}$ admet (par exemple) comme représentation paramétrique (il n'y a pas unicité) :

$$\begin{cases} x = 1 + 0\,t \\ y = 0 + 5\,t \\ z = -3 + 7\,t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \iff \boxed{(d1)\ :\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 5\,t \\ z = -3 + 7\,t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$$

2. Réciproquement, soit la droite (d2) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 5t \\ z = 10 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 0 + 2\,t \\ y = 1 + (-5)\,t \\ z = 10 + 0\,t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

La droite (d2) est donc la droite passant par le point $A\,(0\ ;\ 1\ ;\ 10)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix}$.

VIII Représentation paramétrique d'un plan

On a vu lors de la propriété 9 page 6 que le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est défini comme l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v}$$

soit :

$$\boxed{(\mathcal{P}) = \left\{ M\ ;\ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u} + t'\,\overrightarrow{v}\ ,\ (t,t') \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

En nous plaçant dans un repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, si $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ on obtient en passant aux coordonnées :

$$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u} + t'\,\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + a't' \\ bt + b't' \\ ct + c't' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - x_A = at + a't' \\ y - y_A = bt + b't' \\ z - z_A = ct + c't' \end{cases}$$

Propriété 17 (Représentation paramétrique d'un plan de l'espace)

Soit un repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace.

Le plan $(\mathcal{P})$ passant par $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et dirigé par 2 vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ est défini comme l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases} \quad , \quad (t,t') \in \mathbb{R}^2}$$

Ce système d'équations est appelé **une représentation paramétrique** du plan $(\mathcal{P})$.

Remarque : Il n'y a pas unicité, pour s'en convaincre il suffit de remplacer t pat $2t'$ ou par $t' + 1$.

Exemple

Le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A\,(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-7\\8\\-9\end{pmatrix}$ admet (par exemple) comme représentation paramétrique

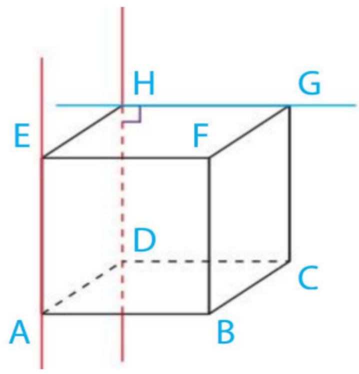
$$\begin{cases} x = 1 + 4t - 7t' \\ y = 2 + 5t + 8t' \\ z = 3 + 6t - 9t' \end{cases} \quad , \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

I Orthogonalité dans l'espace

I.1 Droites orthogonales. Vecteurs orthogonaux

Définition 1 (Droites orthogonales)

Deux droites sont **orthogonales** si et seulement si il existe deux droites perpendiculaires qui leur dont parallèles et qui sont perpendiculaires entre elles.



Exemple

Dans ce cube, les droites (HD) et (GH) sont perpendiculaires (sécante en H). Puisque (AE) est perpendiculaire) (HD), les droites (AE) et (GH) sont orthogonales.

Remarque

1. Attention, **des droites orthogonales, ne sont pas nécessairement sécantes** et donc pas nécessairement perpendiculaires.
2. Par contre, deux droites perpendiculaires sont sécantes et orthogonales.

Définition 2 (Vecteurs orthogonaux)

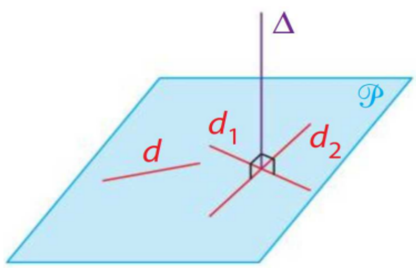
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$ **sont orthogonaux** si et seulement si :

1. soit l'un (au moins) des deux est nul ;
2. soit ce sont des vecteurs directeurs (non nuls) de deux droites orthogonales.

I.2 Droite orthogonale à un plan

Définition 3 (Droite orthogonale à un plan)

Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.



Propriété 1

Si une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, elle est orthogonale à toute droite (d) de ce plan.

II.3 Propriétés

Propriété 7

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\boxed{\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx'+yy'+zz'}$

2. Si $A\left(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_C\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B\right)$ alors

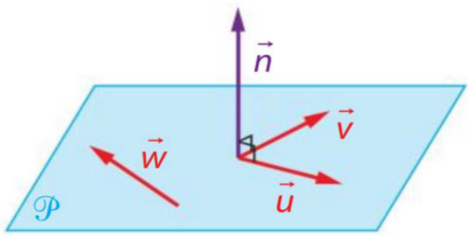
$$\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}}$$

III Vecteur normal à un plan

III.1 Définition

Définition 6

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à un plan $(\mathscr{P})$ si et seulement si il est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $(\mathscr{P})$.



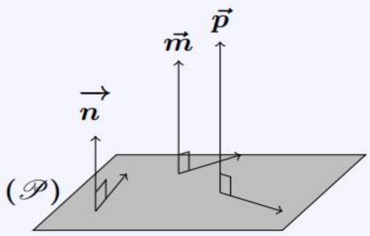
III.2 Propriétés

Propriété 10

Un vecteur normal à un plan est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

Propriété 11

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$.
Tous les vecteurs normaux à un plan sont colinéaires entre eux.



III.3 Lien avec les droites

Propriété 12

1. Une **droite est orthogonale à un plan** si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal du plan.

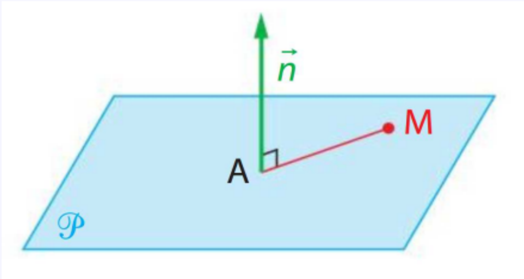
2. Un vecteur normal à un plan est un vecteur directeur de toutes les droites orthogonales au plan.

IV Équation cartésienne d'un plan

Propriété 14

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul, A un point et $(\mathcal{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Alors un point M appartient à $(\mathscr{P})$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$.

$$\boxed{M \in (\mathcal{P}) \iff \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0}$$

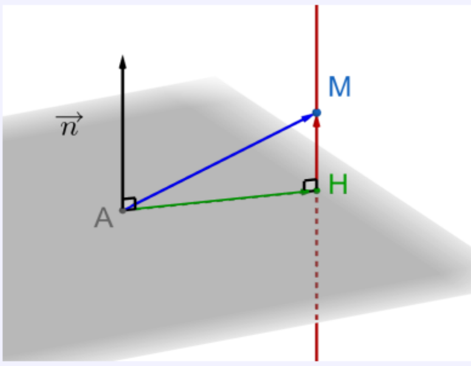


Preuve

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul, A un point et $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

- Si M appartient à $(\mathscr{P})$ alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de $(\mathscr{P})$ or $\vec{n}$ est normal à $(\mathscr{P})$, donc à tous les vecteurs de $(\mathscr{P})$. A fortiori, $\vec{n}$ est normal à $\overrightarrow{AM}$ et donc par définition, le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{AM}$ est nul (définition 5 page 3).
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$.

  Considérons H le projeté orthogonal de M sur $(\mathscr{P})$.



Alors
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}$$
D'une part, $\overrightarrow{AH}$ est contenu dans $(\mathscr{P})$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux et ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

D'autre part, $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et donc

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \begin{cases} \|\vec{n}\| \times HM \\ \text{ou} \\ -\|\vec{n}\| \times HM \end{cases}$$

On en déduit donc que
$$\|\vec{n}\| \times HM = 0$$
et ainsi, puisque $\vec{n} \neq \vec{0}$, $HM = 0$: le point M est confondu avec le point H, il appartient donc à $(\mathscr{P})$.

On en déduit que :

Propriété 15

Dans un repère orthonormé de l'espace, soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace.
L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \, . \, \overrightarrow{n} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} . \overrightarrow{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0$$

Et donc

Propriété 16 (Équation cartésienne d'un plan)

Dans un repère orthonormé de l'espace :

1. l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $ax+by+cz+d = 0$, avec $(a\ ,\ b\ ,\ c) \neq (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$;
2. tout plan admet une équation (dite **cartésienne**) de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a\ ,\ b\ ,\ c) \neq (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$.