Exercice N°1 :

a) On détermine les coordonnées du point M aux instant $t = 0$ et $t = 2$ s

$$\overrightarrow{OM}(0) = (-2\,;\,1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM}(2) = (6\,;\,1)$$

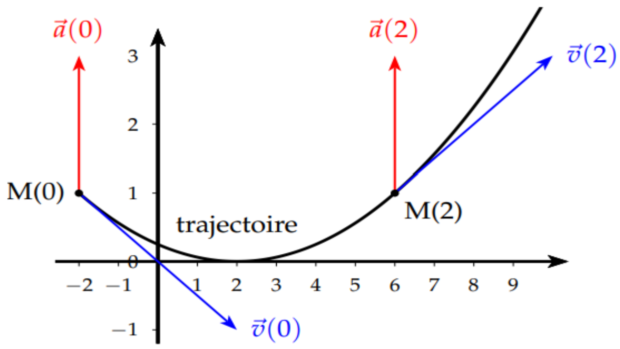
b) Pour déterminer l'accélération à l'instant $t = 10$ s, il faut dériver deux fois le vecteur position :

$$\vec{v} = (4\,;\,2t-2) \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = (0\,;\,2)$$

L'accélération est donc constante donc $a(10) = 2\ \text{m.s}^{-2}$

c) Pour déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire, il faut éliminer t des équations horaires. De l'expression de $x(t)$, on a : $t = \dfrac{x+2}{4}$ que l'on remplace dans l'expression de $y(t)$ en remarquant que :
$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$

$$y = \left(\frac{x+2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{x+2-4}{4}\right)^2$$
$$= \frac{(x-2)^2}{16} = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$



La trajectoire est donc une parabole de sommet S(2;0). Pour connaître le sens du parcours il suffit de repérer les points M(0) et M(2).

Exercice N°2 :

1) a) **Analyse du problème : référentiel, repère, bilan des forces, PFD.**

Le mouvement du skieur est de faible amplitude et de courte durée, on peut donc considérer que le référentiel terrestre est galiléen. Faisons une figure pour visualiser le bilan des forces :

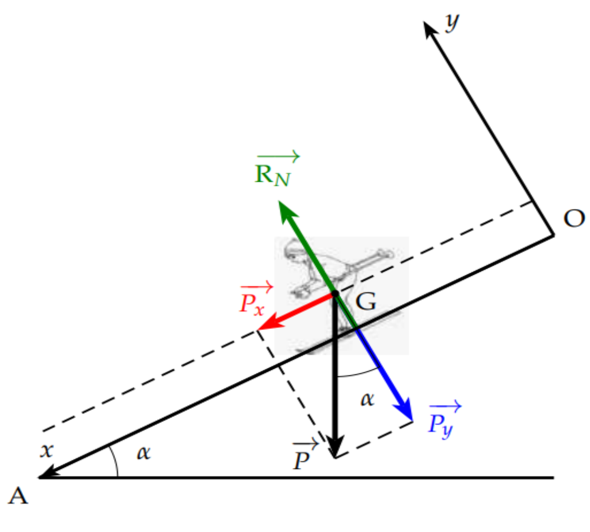
Données :

- $m = 80$ kg
- OA $= 150$ m
- $\alpha = 20^\circ$
- Le skieur part de O sans vitesse initiale.

Repère :

On prendra le repère lié à Oxy. On décompose alors le poids $\overrightarrow{P}$ en une composante sur x, $\overrightarrow{P_x}$, et une composante sur y, $\overrightarrow{P_y}$. Comme il n'y a pas de force de frottement la force de réaction est normale au sol

Par perpendicularité on retrouve l'angle α en G



b) **Résolution du problème : vitesse v en A.**

D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD), on a :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = m\vec{a}$$

On suppose que le skieur ne décolle pas donc l'accélération n'a lieu que sur l'axe Ox. En projetant alors sur Ox et Oy, on a :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_x \\ -P_y + \mathrm{R}_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\sin\alpha = m\,a_x & (1) \\ \mathrm{R}_N = P_y \end{cases}$$

De (1), comme $P = mg$, on obtient : $mg\sin\alpha = m\,a_x \quad \Leftrightarrow \quad a_x = g\sin\alpha$

On constate que l'accélaration du skieur ne dépend pas de sa masse !

On intègre deux fois pour obtenir la vitesse et l'équation horaire :

$$v(t) = g\sin\alpha\, t + v_0 = g\sin\alpha\, t \quad \text{car } v_0 = 0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 + x_0 = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 \quad \text{car } x_0 = 0$$

On peut alors déterminer le temps t_A où le skieur est en bout de piste

$$\mathrm{OA} = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t_\mathrm{A}^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{2\mathrm{OA}}{g\sin\alpha}} \simeq 9,5 \text{ s}$$

On peut enfin trouver la vitesse v en bout de piste :

$$v = v(t_\mathrm{A}) = g\sin\alpha\, t_\mathrm{A} = g\sin\alpha\sqrt{\frac{2\mathrm{OA}}{g\sin\alpha}} = \sqrt{2g\sin\alpha\,\mathrm{OA}} \simeq 32 \text{ m.s}^{-1}$$

Pour trouver la vitesse en km.h^{-1}, on multiplie par 3,6 : $v = 114$ km.h^{-1}

2) a) **Analyse du problème : référentiel, repère, bilan des forces, PFD.**

Par rapport au cas précédent, il faut rajouter une force de frottement $\vec{f}$ dans le sens contraire au mouvement :

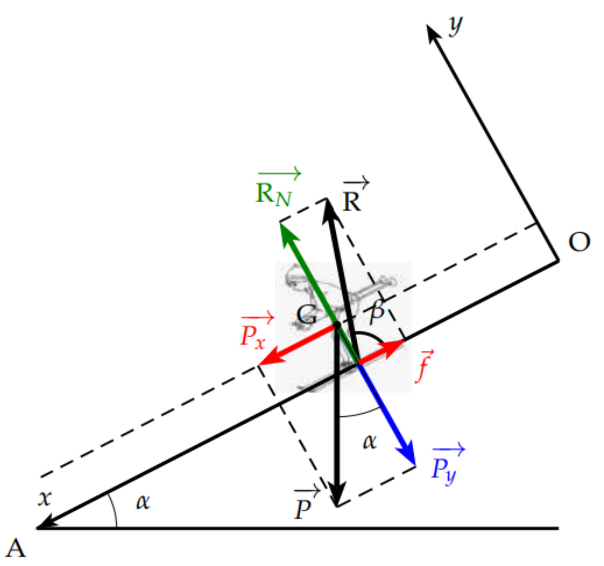
Données :

- $m = 80$ kg
- $\mathrm{OA} = 150$ m
- $\alpha = 20°$
- $f = 150$ N
- Le skieur part de O sans vitesse initiale.

Repère :

On décompose la réaction $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ en une composante sur x, $\vec{f}$, et une composante sur y, $\overrightarrow{\mathrm{R}_N}$.

L'angle β correspond à l'angle de la réaction $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ avec l'axe Ox



b) **Résolution du problème : vitesse v en A.**

D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD), on a :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = m\,\vec{a}$$

On suppose que le skieur ne décolle pas donc l'accélération n'a lieu que sur l'axe Ox. En projetant alors sur Ox et Oy, on a :

$$\begin{cases} P_x - f = m\,a_x \\ -P_y + \mathrm{R}_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\sin\alpha - f = m\,a_x & (1) \\ \mathrm{R}_N = P_y \end{cases}$$

De (1), comme $P = mg$, on obtient :

$$mg\sin\alpha - f = m\,a_x \quad \Leftrightarrow \quad a_x = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

On constate dans ce cas que l'accélaration du skieur dépend de sa masse.

On intègre deux fois pour obtenir la vitesse et l'équation horaire :

$$v(t) = \left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)t + v_0 = \left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)t \quad \text{car } v_0 = 0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)t^2 + x_0 = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)t^2 \quad \text{car } x_0 = 0$$

On peut alors déterminer le temps t_A où le skieur est en bout de piste

$$\mathrm{OA} = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)t_\mathrm{A}^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{2m\mathrm{OA}}{mg\sin\alpha - f}} \simeq 14,2\ \mathrm{s}$$

On peut enfin trouver la vitesse v en bout de piste :

$$v = v(t_\mathrm{A}) = \left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)t_\mathrm{A} = \left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)\sqrt{\frac{2\,\mathrm{OA}}{g\sin\alpha}}$$
$$= \sqrt{\frac{2(mg\sin\alpha - f)\,\mathrm{OA}}{m}} \simeq 21\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Pour trouver la vitesse en km.h^{-1}, on multiplie par 3,6 : $v = 76\ \mathrm{km.h^{-1}}$

Remarque : Si l'on veut connaître l'angle β que fait $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ avec l'axe Ox.

$$\tan\beta = \frac{f}{P_y} = \frac{f}{mg\cos\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \arctan\frac{mg\cos\alpha}{f} \simeq 78,5^\circ$$

Exercice N°3 :

1. Mesures de reprises (/5).

1.1. + La valeur de l'accélération a_1 du véhicule est donnée par :
a_1 = (VA – Vo) / t= (40/3,6)/5,4 = 2,1 m/s².

1.2. + Par définition : $\overrightarrow{a1} = \frac{d\,\vec{V}}{dx}$.

1.3. + On a donc : $\vec{V} = \overrightarrow{a1} \times t + \overrightarrow{Vo}$ soit après projection dans un repère Ox : V(t) = a_1×t + Vo.

1.4. + Par définition V(t) = $\frac{d\,x(t)}{d\,t}$ donc par intégration x(t) = ½ × a_1×t² + Vo×t + xo = = ½ × a_1×t² + Vo×t

1.5. + La distance parcourue en 5,4 s est : x(t=5,4s) = ½ ×2,1 × (5,4)² + (30/3,6)×5,4 = 75,6 m