Terminale	**Correction Série 2** : Limites et continuité	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

1. On a $\lim_{x\to 5} x^2 - 11x + 28 = -2$ et $\lim_{x\to 5} x^2 - 25 = 0$. Il faut faire attention au signe du dénominateur. Pour $x > 5$, on a $x^2 > 25$ et donc $\lim_{x\to 5^+} x^2 - 25 = 0^+$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25} = -\infty.$$

2. On procède de la même façon, mais on remarque que $\lim_{x\to 5^-} x^2 - 25 = 0^-$. On a cette fois

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25} = +\infty.$$

3. On a $\lim_{x\to 5} x^2 - 9x + 20 = 0$, et donc on est en présence d'une forme indéterminée $0/0$. On va lever cette forme indéterminée en factorisant le numérateur et le dénominateur par la racine commune. En effet, on a d'une part

$$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$$

et d'autre part

$$x^2 - 9x + 20 = (x-5)(x-4).$$

On peut donc écrire que

$$\frac{x^2 - 9x + 16}{x^2 - 25} = \frac{(x-5)(x-4)}{(x-5)(x+5)} = \frac{x-4}{x+5}.$$

On n'est plus en présence d'une forme indéterminée, car

$$\lim_{x\to 5} x - 4 = 1 \text{ et } \lim_{x\to 5} x + 5 = 10.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 9x + 16}{x^2 - 25} = \frac{1}{10}.$$

Il n'y a plus besoin ici de distinguer limite à droite et limite à gauche.

Exercice N°2 :

1. On a $f(x) = \sqrt{g(x)}$ si on pose $g(x) = \dfrac{4x+1}{x}$.

2. D'une part, en 0, on a $\lim_{x\to 0} 4x + 1 = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$. En utilisant le théorème sur les quotients de limites, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on sait que, puisque g est le quotient de deux polynômes, on a

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x}{x} = \lim_{x\to +\infty} 4 = 4.$$

3. D'une part, on sait que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{y\to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, par le théorème de composition des limites.
D'autre part, on sait que $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 4$ et que $\lim_{y\to 4} \sqrt{y} = 2$. On en déduit que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

Exercice N°3 :

Dans chaque cas, on va multiplier par la quantité conjuguée.

1.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4} &= \frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\ &= \frac{(x+4)-(x-4)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\ &= \frac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}.\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée) et donc on a

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=0.$$

2.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1}-x &= \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}\\ &= \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, et donc on a

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x=0.$$

Exercice N°4 :

Dans le premier cas, on a une forme indéterminée du type $+\infty-\infty$, et dans les trois autres cas, on a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On lève souvent ces formes indéterminées en mettant en facteur le terme dominant.

1. On met en facteur e^{2x}. Il vient :

$$e^{2x}-e^x=e^{2x}\left(1-\frac{e^x}{e^{2x}}\right)=e^{2x}(1-e^{-x}).$$

Or, $\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}1-e^{-x}=1$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}e^{2x}-e^x=+\infty.$$

2. On met en facteur e^{2x} au numérateur, et x au dénominateur. On a

$$\frac{e^{2x}+1}{x+3}=\frac{e^{2x}}{x}\times\frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}.$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty}1+e^{-2x}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}1+\frac{3}{x}=1 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}=1.$$

D'autre part, par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=+\infty.$$

Finalement, on conclut par produit de limites que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{x+3}=+\infty.$$

3. On met en facteur xe^x au numérateur, et e^x au dénominateur. Il vient :

$$\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=\frac{xe^x}{e^x}\times\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=x\times\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}.$$

Or, puisque $\lim_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée!), puisque $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$, il vient

$$\lim_{x\to+\infty}1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}1-3e^{-x}=1\text{ donc }\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=1.$$

On en déduit par produit de limites que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=+\infty.$$

4. On met en facteur x^2 au numérateur et au dénominateur. On trouve

$$\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}.$$

Puisque $-1\leq\sin x\leq 1$, on a pour tout $x>0$,

$$\frac{-1}{x}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{1}{x}$$

et donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. On prouve de la même façon que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$. On a donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{1}{1}=1.$$

Exercice N°5 :

1. On factorise par le terme dominant au numérateur et au dénominateur, et on trouve

$$\frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}=e^{2x}\times\frac{1+2xe^{-3x}+7e^{-3x}}{1+e^{-2x}}.$$

Par comparaison des fonctions puissance et exponentielle, on a $\lim_{+\infty}xe^{-3x}=0$ et donc la fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. On va multiplier par la quantité conjuguée au numérateur et au dénominateur. On trouve

$$\frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1+x-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{x^2\times\left(\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)}=\frac{-1}{4\left(\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)}.$$

On en déduit que la limite recherchée vaut $-\frac{1}{8}$.

3. On met en facteur le terme dominant et on trouve, pour $x>0$ (attention au calcul au numérateur!)

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}.$$

On a levé la forme indéterminée, et la limite recherchée vaut donc 1.

4. On a une forme indéterminée du type $0/0$. On la lève en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}=\frac{2x^2+5x+9-9}{x\left(\sqrt{2x^2+5x+9}+3\right)}=\frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x+9}+3}.$$

La limite recherchée est donc $5/6$.

5. On utilise (bien sûr!) la quantité conjuguée, qui donne

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}.$$

En mettant en facteur $\sqrt{x}$ au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1}.$$

La forme n'est plus indéterminée, et la limite recherchée est $1/2$.