Terminale	Série 2 : Dérivation - Etude de fonction	OMRI Rafik

Exercice N°1 : Correction

1. $f'(x) = -8x + 56$

2. $f'(x) = 4(7x+10) + 7(4x+7) = 28x + 40 + 28x + 49 = 56x + 89$

3. $f'(x) = \dfrac{3(2x+1)-2(3x-4)}{(2x+1)^2} = \dfrac{6x+3-6x+8}{(2x+1)^2} = \dfrac{11}{(2x+1)^2}$

4. $f'(x) = \dfrac{3(1-6x)-(-6)(8+3x)}{(1-6x)^2} = \dfrac{3-18x+48+18x}{(1-6x)^2} = \dfrac{51}{(1-6x)^2}$

5.
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-8) - 2\sqrt{x}}{(2x-8)^2}$$
$$= \frac{\frac{2x-8}{2} - 2x}{\sqrt{x}(2x-8)^2}$$
$$= \frac{x-4-2x}{\sqrt{x}(2x-8)^2}$$
$$= \frac{-x-4}{\sqrt{x}(2x-8)^2}$$

6.
$$f'(x) = \frac{(2x+18)(6x+4)-6(x^2+18x)}{(6x+4)^2}$$
$$= \frac{12x^2+8x+108x+72-6x^2-108x}{(6x+4)^2}$$
$$= \frac{6x^2+8x+72}{(6x+4)^2}$$

7.
$$f'(x) = \frac{3(2x^2-3x+5)-(4x-3)(3x-2)}{(2x^2-3x+5)^2}$$
$$= \frac{6x^2-9x+15-(12x^2-8x-9x+6)}{(2x^2-3x+5)^2}$$
$$= \frac{-6x^2+8x+9}{(2x^2-3x+5)^2}$$

Exercice N°2 :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule.

$$f'(x) = \frac{10(5x^2+1)–10x(10x+4)}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{50x^2+10–100x^2–40x}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-50x^2–40x+10}{(5x^2+1)^2}$$

2. Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $-50x^2-40x+10$.

Calculons le déterminant : $\Delta = (-40)^2–4 \times 10 \times (-50) = 3600$

Il y a donc deux racines réelles :

$x_1 = \frac{40–\sqrt{3600}}{-100} = \frac{40–60}{-100} = \frac{1}{5}$ et $x_2 = -1$

Le coefficient $a = -50 < 0$ donc l'expression est positive entre les racines et négative en dehors. On obtient ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$-50x^2-40x+10$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	

3. Une équation de la tangente est de la forme :

$$u = f'(a)(x–a) + f(a)$$

Ici $f'(0) = 10$ et $f(0) = 4$.

Donc une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est :

$$y = 10x + 4$$

4. Pour déterminer la position relative de cette tangente à la courbe, on étudie le signe de :

$$f(x) - (10x+4) = \frac{10x+4}{5x^2+1}–(10x+4)$$

$$= \frac{10x+4}{5x^2+1}–\frac{(10x+4)\left(5x^2+1\right)}{5x^2+1}$$

$$= \frac{(10x+4)\left(1–\left(5x^2+1\right)\right)}{5x^2+1}$$

$$= \frac{(10x+4)\left(-5x^2\right)}{5x^2+1}$$

$$= -\frac{(10x+4)\left(5x^2\right)}{5x^2+1}$$

Le signe de cette expression ne dépend donc que de celui de $-(10x+4)$

Or $-(10x+4) > 0 \Leftrightarrow 10x+4 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{5}$.

Par conséquent la courbe est au-dessus de la tangente sur $\left]-\infty; -\frac{2}{5}\right]$ et au-dessous sur $\left[-\frac{2}{5}; +\infty\right[$.

Exercice N°3 :

1) $f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-2x}{x^2-1} = 1 \quad \overset{x^2 \neq 1}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 2x = x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$.

$\mathscr{C}_f$ coupe la droite $y = 1$ au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2} \; ; \; 1\right)$.

2) $f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-1)-2x(x^2-2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2x+2}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{2(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 \; ; \; 1\}, \quad \frac{2}{(x^2-1)^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ signe de $f'(x) =$ signe de (x^2-x+1).

3) Racine de $x^2 - x + 1$: $\quad \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ pas de racine.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 \; ; \; 1\}, \quad x^2 - x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0$.

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R} - \{-1 \; ; \; 1\}$.

4) Limite en $+\infty$: $\quad f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-1} \overset{\div x^2}{=} \frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$. On a alors $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2} = 1 \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Limite en 1 :

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} x^2 - 2x = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 - 1 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 - 1 = 0^- \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

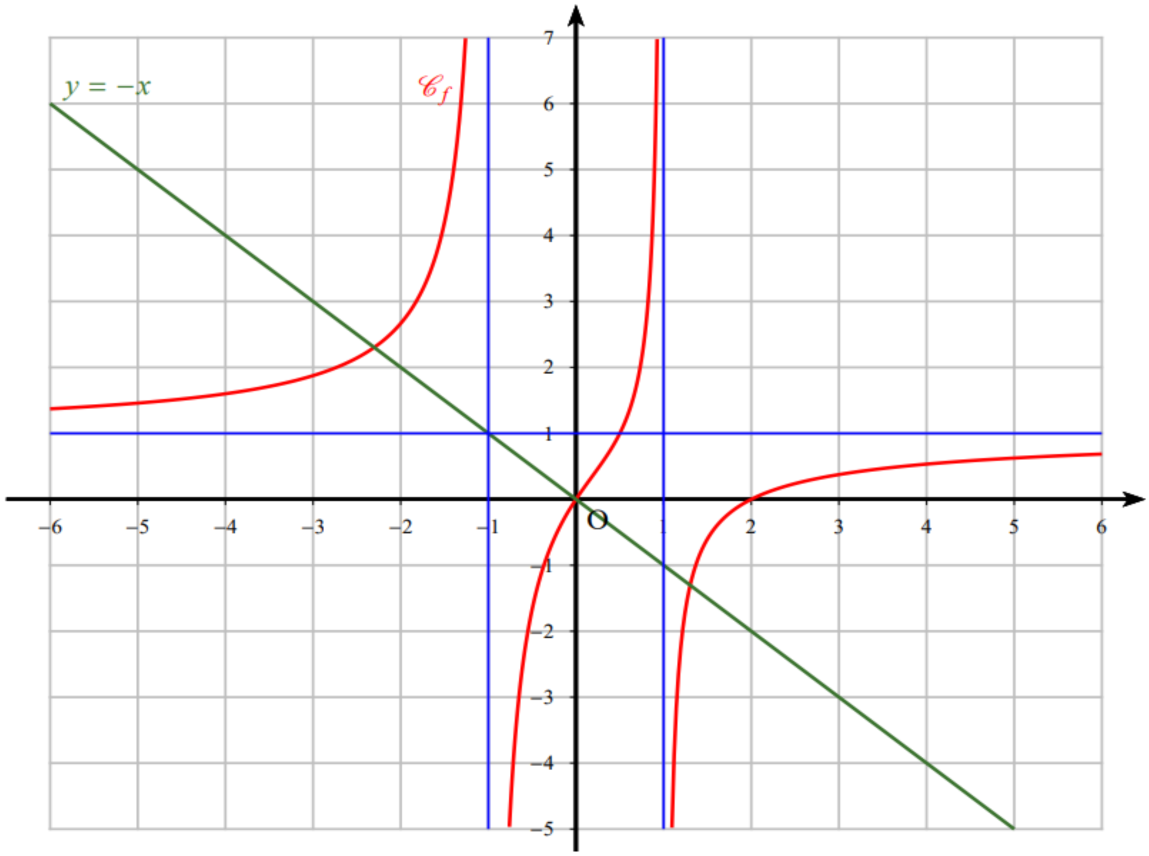
On en déduit une asymptote horizontale $y = 1$ et une asymptote verticale $x = 1$.

5) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

6) Si $\mathscr{C}_f$ a une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$ alors $\exists x_0,\ f'(x_0) = -1$.
Impossible car $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\},\ f'(x) > 0$.

A titre indicatif, voici la courbe $\mathscr{C}_f$:



Exercice N°4 :

1) $f(x) \overset{x\neq 0}{=} x^4\left(2 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$ donc $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 2 \end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

2) $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 4x = 4x(2x^2 - 3x + 1)$.

3) $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Racine de $2x^2 - 3x + 1$, $x_1 = 1$ racine évidente $P = \dfrac{1}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Pour déterminer le signe de la dérivée, on remplit un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On pourrait montrer que la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

5) D'après le tableau de variation, en admettant la continuité, l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions. En effet la fonction f :

- sur $]-\infty\ ;\ 0]$ passe par 1 une seule fois car monotone et varie de 0 à $+\infty$;
- sur $[0\ ;\ 1]$ ne passe pas par 1 car varie de 0 à $\dfrac{1}{8}$;
- sur $[1\ ;+\infty[$ passe par 1 une seule fois car monotone et varie de 0 à $+\infty$.

Exercice N°5 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$

par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) f est dérivable si $x + 3 > 0 \iff x > -3$ donc $\mathrm{I} =]-3\ ;+\infty[$

3) $f'(x) = \sqrt{x+3} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$.

4) $f'(x) = 0 \iff x = -2$ et le signe de $f'(x)$ sur I est du signe de $(x + 2)$.

5) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

6) L'équation de la tangent en 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f'(1) = \frac{9}{4}$ et $f(1) = 2$.

(T) : $y = \frac{9}{4}(x-1) + 2 \iff y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4}$

7) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente vertical en $x = -3$ car $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontal en $x = -2$ car $f'(-2) = 0$.

Pour tracer (T) on peut prendre les points $(-1\,;-2,5)$ et $(1\,;2)$.

On obtient la courbe suivante :