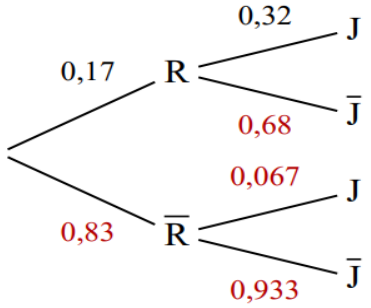
Terminale | **Correction série 2 : Probabilité** | OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Partie A :

1) $p(\mathrm{R}) = 0,17$ et $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{J}) = 0,32$.

On obtient l'arbre suivant :



2) $p(\mathrm{R} \cap \mathrm{J}) = p(\mathrm{R}) \times p_{\mathrm{R}}(\mathrm{J}) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544 \approx 0,054$.

3) $p(\mathrm{J}) = 0,11$.

$$p(\mathrm{J}) \overset{\text{prob. totale}}{=} p(\mathrm{R} \cap \mathrm{J}) + p(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{J}) \Rightarrow p(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{J}) = p(\mathrm{J}) - p(\mathrm{R} \cap \mathrm{J}) = 0,11 - 0,0544$$
$$= 0,0556 \approx 0,056$$

4) $p_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{J}) = \dfrac{p(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{J})}{p(\overline{\mathrm{R}})} = \dfrac{0,056}{0,83} \approx 0,067$

La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ 6,7 %.

Partie B :

1) Soit l'expérience : on interroge une une personne sur sa pratique des transports en commun et l'on appelle succès la personne utilise régulièrement les transports en commun avec la probabilité $p = 0,17$.

On réitère 50 fois cette expérience de façon identique et indépendante (assimilé à un tirage avec remise) et l'on appelle X, la variable aléatoire associée au nombre de succès.

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50\,;\,0,17)$.

2) $p(X = 5) = \dbinom{50}{5} \times 0,17^5 \times 0,83^{45} = \text{binomFdp}(50\,,\,0.17\,,\,5) \approx 0,069$

Il y a donc une probabilité de 0,069 que, sur 50 personnes interrogées, 5 personnes exactement prennent régulièrement les transports en commun.

3) $p(X < 13) = p(X \leqslant 12) = \text{binomFRép}(50\,,\,0.17\,,\,12) \approx 0,929$

Il y a donc moins de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

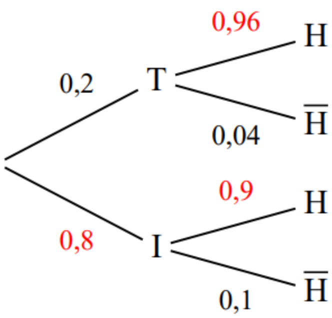
Cette affirmation est fausse.

4) $\mathrm{E}(X) = np = 50 \times 0,17 = 8,5$

Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est de 8,5.

Exercice N°2 :

1) a) On a l'arbre suivant :



b) $p(\mathrm{H}) \overset{\text{prob. totale}}{=} p(\mathrm{T} \cap \mathrm{H}) + p(\mathrm{I} \cap \mathrm{H}) = p(\mathrm{T})p_{\mathrm{T}}(\mathrm{H}) + p(\mathrm{I})p_{\mathrm{I}}(\mathrm{H})$

$= 0,2 \times 0,96 + 0,8 \times 0,9 = 0,912.$

c) $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{I}) = \dfrac{p(\mathrm{I} \cap \mathrm{H})}{p(\mathrm{H})} = \dfrac{0,8 \times 0,9}{0,912} \approx 0,789.$

2) a) Soit l'expérience : on tire au hasard une réservation et on appelle succès la personne se présente à l'hôtel avec une probabilité de 0,912. On réitère 106 fois cette expérience, que l'on assimile à des tirages avec remise, de façon identique et indépendante dont la variable aléatoire X est associée au nombre de succès.

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(106\ ;\ 0,912)$.

b) $p(X = 106) = 0,912^{106} \approx 5,75 \times 10^{-5} \approx 6 \times 10^{-5}$.

c) $p(X \geqslant 101) = 1 - p(X \leqslant 100) = 1 - \text{binomFRép}(106, 0.912, 100) \approx 0,087 \approx 0,09.$

Il y a 9 % de chance que le directeur se retrouve en situation de surréservation.

d) On cherche le nombre de réservation n pour que : $p(X \leqslant 100) \geqslant 0,99$

À l'aide de la calculatrice. On rentre la fonction :
$Y_1 = \text{binomFRép}(X, 0.912, 100)$.
Puis on crée un tableau de valeurs, initialisé à 100 avec un pas de 1. On obtient alors le tableau ci-contre :

X	Y1
100	1
101	0.9999
102	0.9991
103	0.9955
104	0.9845
105	0.9594
106	0.913
107	0.8408
108	0.7437
109	0.6284
110	0.5055

On trouve donc $n = 103$.

Si le directeur ouvre le nombre de réservation à 103, il est sûr à 99 % que toutes les réservations seront honorées.

Exercice N°3 :

1) On obtient le tableau suivant :

	A	$\overline{\mathrm{A}}$	Total
R_1	50	100	150
R_2	25	75	100
R_3	0	50	50
Total	75	225	300

2) a) $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{R}_2) = \dfrac{25}{300} = \dfrac{1}{12}$ b) $p(\mathrm{R}_2) = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$ c) $p_{\mathrm{R}_2}(\mathrm{A}) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

3) a) On a : $p(X = 1) = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2}$ $p(X = 2) = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$ $p(X = 3) = \dfrac{50}{300} = \dfrac{1}{6}$

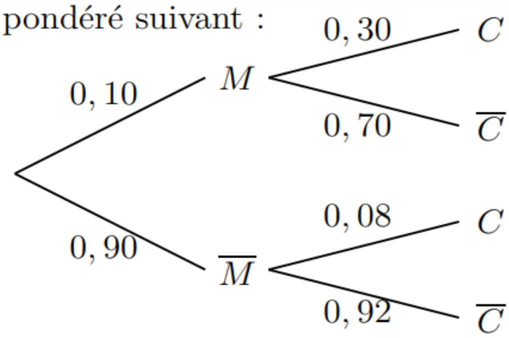
x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{3} \times 2 + \dfrac{1}{6} \times 3 = \dfrac{3 + 4 + 3}{6} = \dfrac{5}{3} \approx 1,67.$

La moyenne du nombre de présentations à l'examen est de 1,67.

Exercice N°4 :

Partie A On peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. a. $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

   b. En utilisant l'arbre (ou d'après la formule des probabilités totales) :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right) \\ &= P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102 \end{aligned}$$

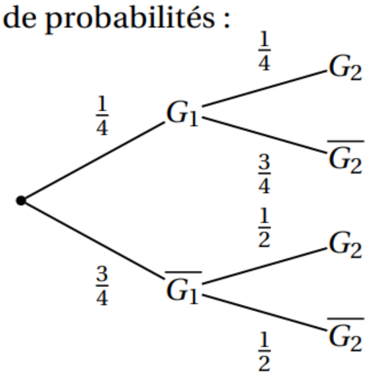
2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.
   La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:
   $P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$

Partie B

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.
   Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0,1$ d'après l'énoncé.
   Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.
2. Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400\,;0,1)$, $P(X = 35) = \begin{pmatrix} 400 \\ 35 \end{pmatrix} 0,1^{35}(1-0,1)^{400-35}$;
   le résultat donné par la calculatrice est approximativement $0,0491$.
3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(X \geqslant 30)$ qui est égale à $1 - P(X < 30) = 1 - P(X \leqslant 29)$.
   D'après la calculatrice, $P(X \leqslant 29) \approx 0,0357$, donc $P(X \geqslant 30) \approx 0,9643$.

Exercice N°5 :

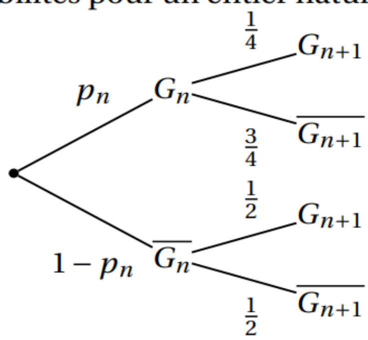
1. On commence par faire un arbre de probabilités :



On cherche $p_2 = P(G_2)$, or les évènements G_1 et $\overline{G_1}$ forment une partition de l'univers. donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
p_2 &= P\left(G_1 \cap \overline{G_2}\right) + P\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)\\
p_2 &= p(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2)\\
p_2 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\\
p_2 &= \frac{7}{16}
\end{aligned}$$

2. On fait un nouvel arbre de probabilités pour un entier naturel n non nul :



On cherche $p_{n+1} = P(G_{n+1})$, or les évènements G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers. Donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P\left(G_n \cap \overline{G_{n+1}}\right) + P\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right)\\
&= p(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})\\
&= p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n\\
&= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a bien, pour tout entier naturel n non nul, $\quad p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

3. La suite n'est pas monotone, mais elle semble converger vers 0,4.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{5}\\
&= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\\
&= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10}\\
&= -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{1}{10} \times 4\right)\\
&= -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right)\\
&= -\frac{1}{4}u_n
\end{aligned}$$

On vient donc de démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{4}$.
et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{3}{20}$.

b. La suite (u_n) étant géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{3}{20}$, on a pour tout entier naturel $n \neq 0$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Or $\quad u_n = p_n - \dfrac{2}{5} \quad$ d'où $\quad p_n = u_n + \dfrac{2}{5}$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{20}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. $-1 < -\dfrac{1}{4} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et par conséquent La suite (u_n) est convergente et a pour limite $\dfrac{2}{5}$.

Cela signifie qu'après un grand nombre de parties jouées, la probabilité de gagner sera proche de $\dfrac{2}{5}$.