Terminale	Série 2 : Continuité des fonctions	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

1. La fonction est clairement continue sur $]1;+\infty[$ et sur $]-\infty;1[$. Pour que f soit continue, il faut et il suffit que f admette une limite à droite et à gauche en 1 et que ces limites coïncident. Mais on a

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a\sin(\pi/2) = a \text{ tandis que } \lim_{x\to 1^-} f(x) = a^2.$$

La fonction f est donc continue en 1 si et seulement si $a^2 = a$ c'est-à-dire si et seulement si $a = 1$ ou $a = 0$.

2. On fait la même chose, mais on doit étudier cette fois la continuité à droite et à gauche en 0 et en 1, la fonction g étant clairement continue sur $]-\infty;0[$, sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. On a d'une part

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} g(x) = \alpha+\beta.$$

D'autre part, on a

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \alpha e^{-1} + \beta e^1 + \gamma(e^1 - e^{-1}) \text{ et } \lim_{x\to 1^+} g(x) = e^1.$$

La fonction g est continue si et seulement si le triplet (α,β,γ) vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ e^{-1}\alpha + e^1\beta + (e^1 - e^{-1})\gamma &= e^1. \end{cases}$$

On résout ce système, par exemple en retirant $e^{-1}L_1$ à L_2. On trouve le système équivalent :

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ (e^1 - e^{-1})\beta + (e^1 - e^{-1})\gamma &= e^1 - e^{-1}. \end{cases}$$

On peut simplifier par $e^1 - e^{-1}$ dans la seconde équation et on trouve

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ \beta+\gamma &= 1. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= \gamma \\ \beta &= 1-\gamma \\ \gamma &= \gamma \end{cases}$$

L'ensemble des triplets pour lesquels la fonction g est continue est donc donné par $\{(0,1,0) + \gamma(1,-1,1) : \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Exercice N°2 :

Le numérateur et le dénominateur s'annule tous les deux en -1, et donc on a une forme indéterminée lorsqu'on calcule la limite de f en -1. Pour lever cette indétermination, on factorise le dénominateur en

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

(pour trouver cette forme, on peut procéder par identification en écrivant $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + ax + b)$). On en déduit alors que, pour tout $x \neq -1$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

Ainsi, $\lim_{x\to -1} f(x) = 1/3$ et on en déduit que l'on peut prolonger f par continuité en -1 en posant $f(-1) = 1/3$.

Exercice N°3 :

Solution : on a : $f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}=x+4$ D.EC

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} x+4=7=f(3)$

Alors : $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Donc :f est continue en $x_0=3$

Exercice N°4 :

Solution : on a : $f(2)=\dfrac{2\times 2+1}{7-3\times 2}=\dfrac{5}{7-3\times 2}=5$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x+3=5=f(2)$

Donc f est continue adroite de f en $x_0=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+1}{7-3x}=\dfrac{5}{1}=5=f(2)$

Donc f est continue gauche en $x_0=2$

Donc f est continue en $x_0=2$

Exercice N°5 :

Si $x\leq 1$, $f(1)=1^2-2\times 1+2=1$.

Si $x>1$, $\dfrac{1}{1}=1$.

On en déduit que f est continue en 1.

La fonction f est continue sur $]-\infty\ ;1]$ en tant que fonction polynôme.

La fonction f est continue sur $]1\ ;+\infty[$ en tant que fonction inverse.

Par conséquent, **f est continue sur $\mathbb{R}$**.

Exercice N°6 :

1) **La fonction f est continue sur $[-4\ ;-2]$, sur $]-2\ ;1[$ et sur $[1\ ;4]$.**

2) **La fonction f n'est pas continue sur $[-4\ ;-1]$.**