Correction

Exercice N°1 :

1) **La courbe représentative de f admet deux points d'inflexion aux points d'abscisse -2 et 3**. En effet, la fonction f'' change de signe en -2 et en 3.

2) Comme f'' est négative sur $[-2\ ;\ 3]$, alors **la fonction f est concave sur $[-2\ ;\ 3]$**.

3) La courbe 1 représente une fonction convexe sur $[-2\ ;-1]$, ce qui est contraire à la réponse de la question 2).
La représentation graphique de la fonction f est donc la courbe 2.

Exercice N°2 :

Partie A

La fonction g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

1. [1 point]

Par composition on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

et par somme

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1 \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$$

2. [1 point]

Sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable et $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ donc

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

La fonction g est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$0 \nearrow 1$

3. [1 point]

Sur $\mathbb{R}_+$, g' est dérivable et

$$g''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $g''(x) < 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. La fonction g est donc concave sur $\mathbb{R}_+$.

Partie B

1.

1. a. [1.5 point]

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-kx} + 1.$$

$u(x) = x - 1 \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-kx}$

$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = -k\mathrm{e}^{-kx}$

$$f = uv + 1 \text{ et } (uv)' = u'v + uv'$$

Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-kx} + (x-1) \times \left(-k\mathrm{e}^{-kx}\right) + 0 \\ &= \mathrm{e}^{-kx}\left(1 + (x-1)(-k)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-kx}(1 - kx + k) \\ f'(x) &= \underline{\mathrm{e}^{-kx}(-kx + k + 1)} \end{aligned}$$

1. b. [1.5 point]

La tangente T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

or $f(1) = 1$ et $f'(1) = \mathrm{e}^{-k}$

Donc T a pour équation

$$y = \mathrm{e}^{-k}(x-1) + 1 = \mathrm{e}^{-k}x - \mathrm{e}^{-k} + 1$$

B est le point de T d'abscisse 0, donc

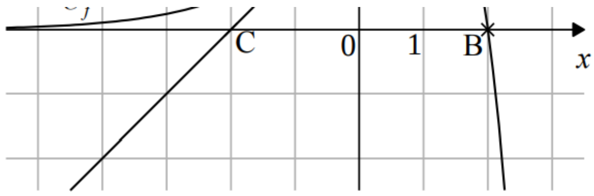
$$y_B = -\mathrm{e}^{-k} + 1 = g(k)$$

2. [1 point]

D'après le tableau de variation de la fonction g de la partie A, pour tout réel positif k, $g(k) \in [0\ ;\ 1]$.

Le point B ayant pour coordonnées $(0\ ;\ g(k))$ avec $0 \leqslant g(k) \leqslant 1$, il appartient bien au segment $[OJ]$.

Exercice N°3 :



a. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f'(1)$.

$f(0) = 2$ et de $f'(1) = 0$.

b. Donner une équation de la tangente en A à $\mathscr{C}_f$.

$y = x + 2$.

c. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f semble convexe et celui sur lequel elle semble concave.

f semble convexe sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et concave sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Dans cette question, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lu graphiquement dans la question 1.

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$.

a. Calculer les valeurs de $f(0)$ et de $f'(1)$.

$f(0) = (2-0)\mathrm{e}^0 = 2$.

$f = uv$ avec $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$,

donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Donc $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x = (1-x)\mathrm{e}^x$.

Donc $f'(1) = (1-1)\mathrm{e}^1 = 0$.

b. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

$f'(0) = (1-0)\mathrm{e}^0 = 1$.

$\mathscr{T} : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = 1(x-0) + 2 = x + 2$.

c. Dresser le tableau de variations de f (sans les limites).

$f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, f' est du signe de $1 - x$, qui affine avec coefficient directeur négatif, s'annulant en 1, donc

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e	$\searrow$	

d. Déterminer une expression de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$f' = uv$ avec $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = e^x$,

donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$.

Donc $f'' = u'v + uv'$, soit $f''(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$.

e. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

f'' est du signe de $-x$, c'est-à-dire positif sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et négatif sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc f est convexe sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et concave sur $[0\ ;\ +\infty[$.

f. Préciser si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion. Si oui, que peut-on dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point.

f'' s'annule en changeant de signe en 0, $\mathscr{C}_f$ admet donc un point d'inflexion en $x = 0$. À cet endroit, la tangente traverse la courbe.

Exercice N°4 :

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$.
   $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$
   Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $p'(x) > 0$. Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$
   La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$ à valeurs dans $[-68\ ;\ 37]$. Or $0 \in [-68\ ;\ 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\ ;\ 4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$ (car $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $1 + x^2 \neq 0$).
   $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $f'(x) = \dfrac{e^x \times (1+x^2) - e^x \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+^2)^2} = \dfrac{(x-1)^2\, e^x}{(1+^2)^2}$.

   b. $f'(x) = 0 \iff \dfrac{(x-1)^2\, e^x}{(1+^2)^2} = 0 \iff (x-1)^2\, e^x \iff (x-1)^2 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$.
   Et $f(1) = \dfrac{e}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \dfrac{e}{2}$.

2. **a.** Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :
   - convexe sur $[-3\ ;\ 0]$;
   - concave sur $[0\ ;\ 1]$;
   - convexe sur $[1\ ;\ 4]$.

   Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.
   Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b. $\forall x \in [-3\,;\,4] : f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\,;\,4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $\left(1+x^2\right)^3 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x=\alpha$ et $x=1$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

Exercice N°5 :

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}.$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}\left(2x^2-2x+1\right)}{x^3}.$$

1. f est dérivable comme fonction quotient de fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On a $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} \times x - 1 \times \mathrm{e}^{2x}}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$. Réponse **c.**

2. Comme sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ et $\mathrm{e}^{2x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$.

$f'(x) = 0 \iff 2x-1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$;

- $f'(x) < 0 \iff 2x-1 < 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$;
- $f'(x) > 0 \iff 2x-1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$;

Conclusion : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est le minimum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$. Réponse **c.**

2. Comme sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ et $\mathrm{e}^{2x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$.

$f'(x) = 0 \iff 2x-1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$;

- $f'(x) < 0 \iff 2x-1 < 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$;
- $f'(x) > 0 \iff 2x-1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$;

Conclusion : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est le minimum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$. Réponse **c.**

3. On a $f(x) = 2 \times \dfrac{e^{2x}}{2x}$.

En posant $X = 2x$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = \lim\limits_{X \to +\infty} X = +\infty$.

On sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: Réponse **a.**

4. Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $x^3 > 0$ et $2e^{2x} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est celui du trinôme $2x^2 - 2x + 1$.

Or $2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.

Donc $f''(x)$ somme de deux nombres positifs est positive sur $]0\ ;\ +\infty$. La fonction est donc convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$. : Réponse **b.**