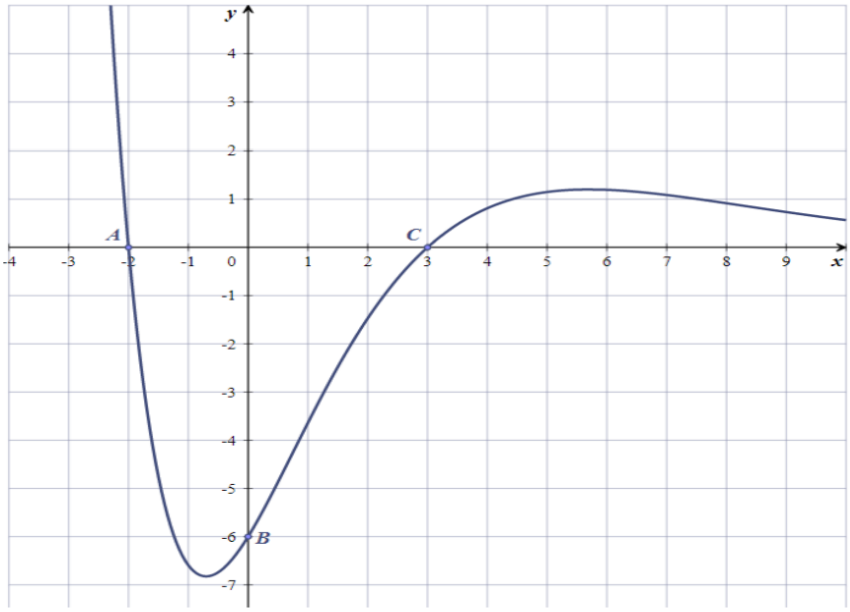
Terminale	**Série 2** : Convexité	OMRI Rafik

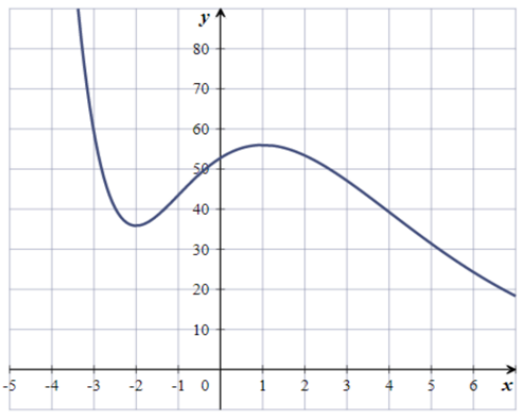
Exercice N°1 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(-2\ ;0)$; $B(0\ ;6)$ et $C(3\ ;0)$.

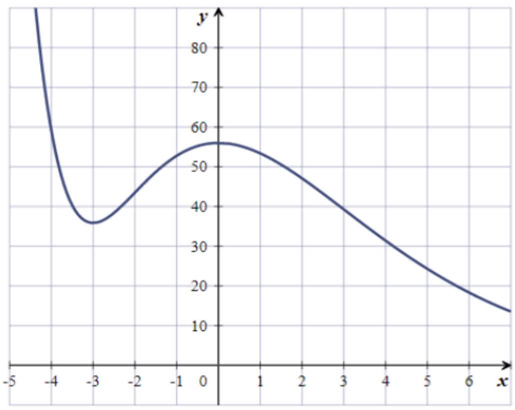


1) La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2) Sur $[-2\ ;3]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3) Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1



Courbe 2



Exercice N°2 :

Partie A

La fonction g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. Étudier la convexité de g.

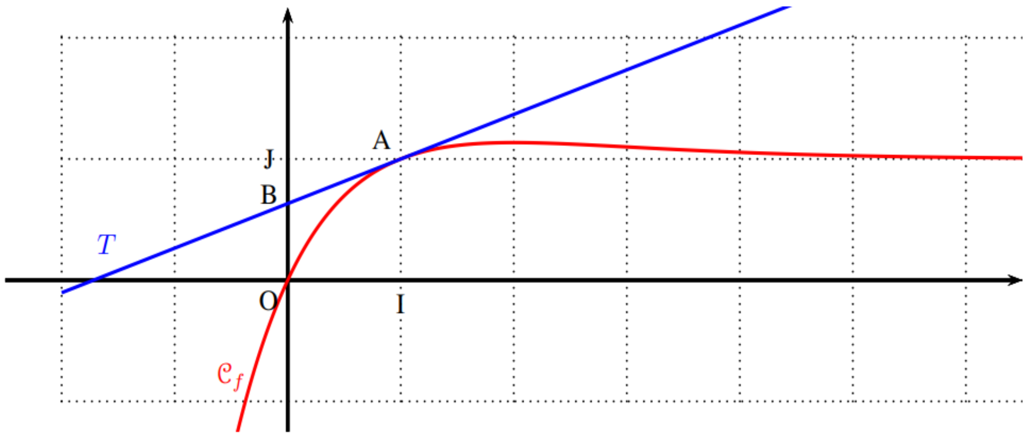
Partie B

Dans cette partie, k désigne un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-kx} + 1.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I, J), on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. Cette courbe est représentée ci-dessous pour une certaine valeur de k.
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en un point noté B.



1.

1. a. Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-kx}(-kx + k + 1).$$

1. b. Démontrer que l'ordonnée du point B est égale à $g(k)$ où g est la fonction définie dans la **partie A**.

2. En utilisant la **partie A**, démontrer que le point B appartient au segment [OJ].

Exercice N°3 :

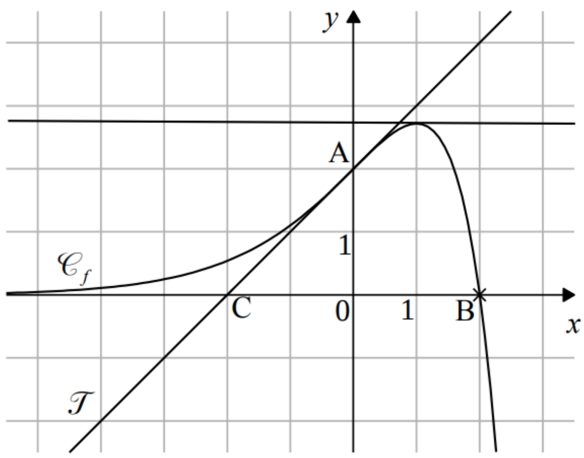
1. Dans un plan muni d'un repère, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. On a placé les points A (0 ; 2), B (2 ; 0) et C (–2 ; 0).

On dispose des renseignements suivants :

- le point B appartient à $\mathscr{C}_f$;

- la droite (AC) est tangente en à $\mathscr{C}_f$;

- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique (*et donc sans justifier*) : :

a. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f'(1)$.

b. Donner une équation de la tangente en A à $\mathscr{C}_f$.

c. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f semble convexe et celui sur lequel elle semble concave.

2. Dans cette question, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lu graphiquement dans la question **1.**

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x$.

a. Calculer les valeurs de $f(0)$ et de $f'(1)$.

b. Dresser le tableau de variations de f (sans les limites).

On admet qu'une expression de f'', la dérivée seconde de f est $f''(x) = -x\mathrm{e}^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice N°4 :

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

Partie B

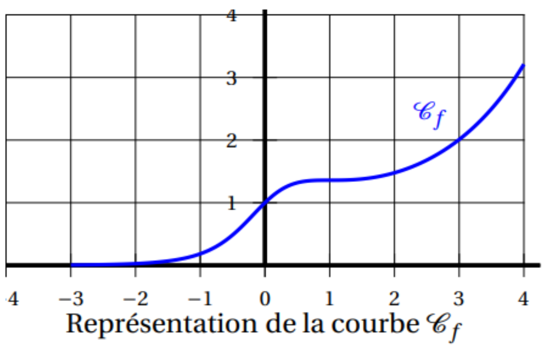
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$$

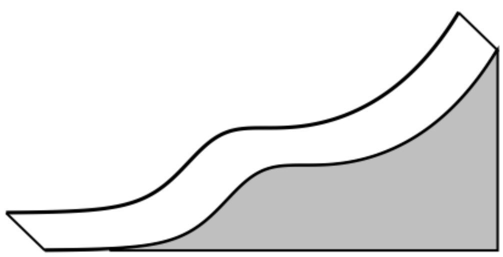
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice N°5 :

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

a. $f'(x) = 2e^{2x}$

b. $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$.

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$

b. est monotone sur $]0\,;\,+\infty[$

c. admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$.

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

a. $+\infty$

b. 0

c. 1

d. e^{2x}.

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0\,;\,+\infty[$

b. est convexe $]0\,;\,+\infty[$

c. est concave sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right]$

d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion.