Terminale	Série 3 : Etude de fonction	OMRI Rafik

Exercice N°1 : Correction

1) a) On a : $P(x) = x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty\end{array}$$

De même, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$

b) P est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $P'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

$\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$, P a un signe constant : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P'(x) > 0$

P est donc croissant sur $\mathbb{R}$.

c) P est continue (car dérivable) et monotone sur $\mathbb{R}$, de plus $0 \in P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $P(\alpha) = 0$

De plus $P(-1) = -4$ et $P(0) = 1$ donc $P(-1) \times P(0) < 0$, donc $\alpha \in [-1; 0]$

d) Par dichotomie, on trouve : $-0{,}295\,60 < \alpha < -0{,}295\,59$

e) Comme P est croissante sur $\mathbb{R}$, on a les relations :

- $x < \alpha \quad P(x) < 0$
- $x > \alpha \quad P(x) > 0$

2) a) On a : $f'(x) = 1 - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2 - 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}{(x^2+1)^2}$

De plus $(x+1)P(x) = (x+1)(x^3 - x^2 + 3x + 1) = x^4 + 2x^2 - 4x + 1$ donc

$f'(x) = \frac{(x+1)P(x)}{(x^2+1)^2}$

b) On a : $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ ou $x = \alpha$

On fait un tableau de signe pour déterminer le signe de la dérivée, puis on dresse le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\simeq -2.13$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice N°2 :

1) a) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car u est un polynôme.

$u'(x) = 6x^2 - 8x + 2 = 2(3x^2 - 4x + 1)$

$u'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1$ racine évidente, $P = \dfrac{1}{3}$ donc $x_2 = \dfrac{1}{3}$

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$u(x)$		↗	$-\frac{19}{27}$	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

b) $u(2) = 3$, sur $[1\ ;\ 2]$
- u est continue (car dérivable)
- u est monotone (croissante)
- $u(1)u(2) = -3 < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [1\ ;\ 2]$ tel que $u(\alpha) = 0$

D'après le tableau de variation :
- si $x > 2$, $u(x) > 0$ donc ne s'annule pas ;
- si $x < 1$, $u(x) < 0$ donc ne s'annule pas.

Conclusion : $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $1 < \alpha < 2$

c) On trouve : $1{,}565\,1 < \alpha < 1{,}565\,2$ avec 14 itérations

d) On obtient la tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

2) a) Limites en $\pm\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

Par un même raisonnement, on trouve : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Limites en 1 : on établit le tableau de signes puis on passe à la limite :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x - 1 = 0^-$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x - 1 = 0^+$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ par somme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x^2-2x+1) - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $(x-1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $u(x)$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\approx 4{,}219$	$\nearrow$	$+\infty$

d) D'après le tableau de variation, f ne peut s'annuler que si $x < 1$. On calcule alors : $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = -1$, donc $-1 < \beta < 0$

Avec le programme de dichotomie, on trouve : $-0,76 < \beta < -0,75$ avec 7 itérations

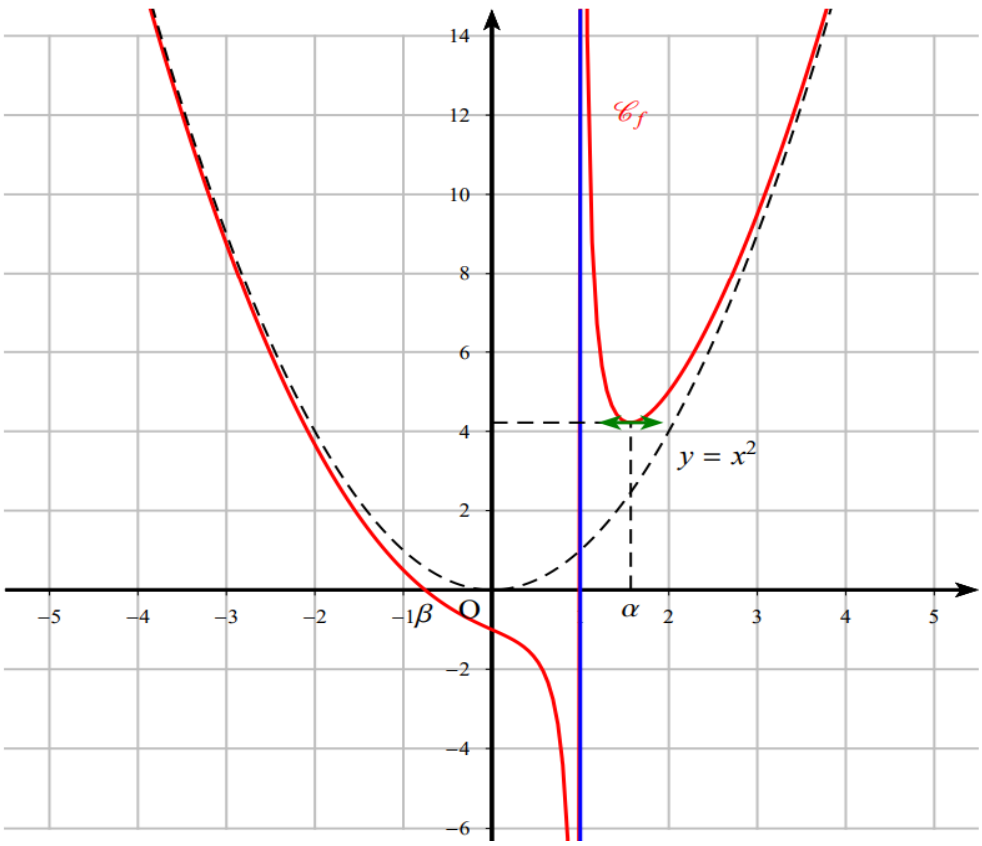
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0.$

La parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ car la différence entre les deux courbe tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$

Cet algorithme calcule le plus petit entier X pour lequel la différence entre $f(x)$ et la fonction carrée est plus petite que 10^{-3}. car $f(x) - x^2 = \dfrac{1}{x-1}$

Le programme affiche alors : 1002

A titre d'information, voici la courbe $\mathscr{C}_f$



Exercice N°3 :

a) La fonction g est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$

or $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$ donc $g'(x) > 0$

La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$		+		
$g(x)$	$\nearrow$	-6	8	$\nearrow$

b) D'après le tableau de variation :

- Si $x < -2$ alors $g(x) < 0$. L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Si $x > 0$ alors $g(x) > 0$. L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Si $-2 \leqslant x \leqslant 0$ la fonction g est continue (car dérivable), monotone (croissante) et $g(-2)g(0) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe une unique solution $\alpha \in [-2, 0]$ tel que $g(x) = 0$

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$.

c) À l'aide d'un algorithme par la méthode de dichotomie, on trouve :

$$-1{,}513 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}512 \qquad 11 \text{ itérations}$$

d) Comme la fonction g est croissante, on a :

- Si $x < \alpha,\ g(x) < 0$
- Si $x > \alpha,\ g(x) > 0$

2) Étude de la fontion *f*

a) Limites indéterminées, on change la forme de $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^3\left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{x\left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right)}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{4}{x^3} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1 \end{array}\right\} \text{Par produit et quotient } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

De la même manière, on trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3 - 4)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(3x^2 + 3x - 2x^3 + 8)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

c) • $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \alpha$

• Le signe de $f'(x)$ est celui de $xg(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+1)^2 > 0$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

d) On sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha^3 + 3\alpha + 8 = 0$ soit $\alpha^3 = -3\alpha - 8$

En remplaçant dans $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha^3 - 4)}{\alpha^3 + \alpha} = \frac{\alpha(-3\alpha - 8 - 4)}{-3\alpha - 8 + \alpha} = \frac{\alpha(-3\alpha - 12)}{-2\alpha - 8} = \frac{-3\alpha(\alpha + 4)}{-2(\alpha + 4)} = \frac{3}{2}\alpha$$

e) De $-1{,}513 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}512$ on en déduit que $-2{,}270 \leqslant f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha \leqslant -2{,}268$

f) Si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$, on a :

$$f'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2+1)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + 3x^2 + 8x = x^4 + 2x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 8x + 1 = 0$$

On calcule $\Delta = 64 + 4 = 68$ on obtient les solutions suivantes en remarquant que $\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$$x_1 = \frac{-8 + 2\sqrt{17}}{2} = -4 + \sqrt{17} \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{-8 - 2\sqrt{17}}{2} = -4 - \sqrt{17}$$

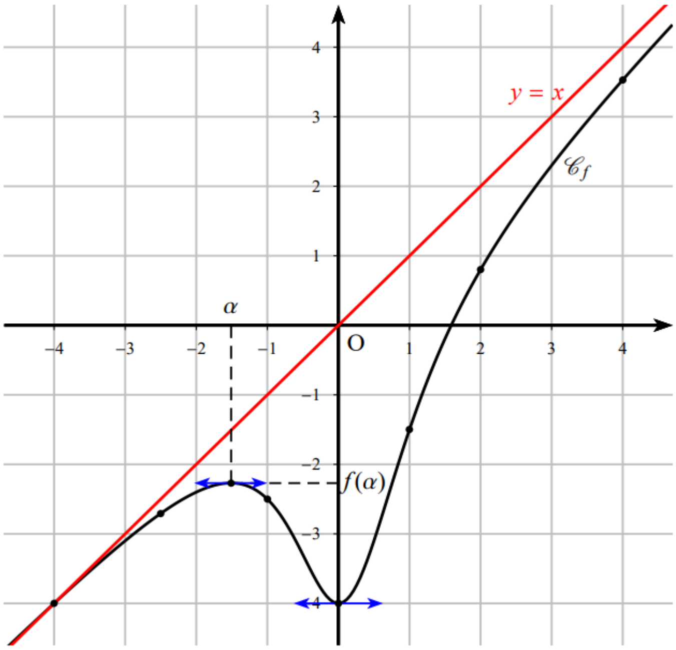
Il existe donc deux points de $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses x_1 et x_2 où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$

3) **Représentation de la fonction *f***

a) On obtient

x	-4	$-2,5$	-1	0	1	2	4
$f(x)$	-4	$-2,707$	$-2,5$	-4	$-1,5$	$0,8$	$3,529$

b) On obtient la courbe ci-dessous :



Exercice N°4 :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+3x-3 = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3+3x-3 = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$

2. g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3x^2+3 \\ &= -3(x^2-1) \\ &= -3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$g'(x)$ est un polynôme du second degré qui s'annule en 1 et en -1 et qui a un terme dominant négatif ($a=-3$), on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	α		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

3. — Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$, la fonction g est continue (car elle est dérivable), $g(-1)=-5$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty[$ et $0 \in [-5\,;\,+\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ a au moins une solution dans $]-\infty\,;\,-1[$ et comme de plus la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle, cette solution est unique.

— Sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, $g(x) \leqslant -1$ donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

L' équation $g(x)=0$ a donc une unique solution α sur $\mathbb{R}$

À l'aide de la calculatrice on remarque que $g(-2,11) \approx 0,064$ est positif et $g(-2,1) \approx -0,039$ est négatif donc $-2,11 < \alpha < -2,1$, $\alpha \approx -2,10$ à 10^{-2} près par excès.

4. A l'aide du tableau de variation on peut dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 2

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-2x^3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} 3-2x^3 = 5 \\ \lim\limits_{x\to-1^-} x^2-1 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par quotient } \boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty}$$

$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x=-1.}$

Mais la courbe $\mathscr{C}_f$ n'a pas d'asymptote horizontale car la limite à l'infini n'est pas finie.

2. Pour tout réel $x<1$, on pose $u(x) = 3-2x^3$ et $v(x) = x^2-1$ d'où $u'(x) = -6x^2$ et $v'(x) = 2x$ et comme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ on aura :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{-6x^2(x^2-1) - 2x(3-2x^3)}{\left(x^2-1\right)^2} \\ &= \frac{-6x^4+6x^2-6x+4x^4}{\left(x^2-1\right)^2} \\ &= \frac{-2x^4+6x^2-6x}{\left(x^2-1\right)^2} \\ &= \frac{2x(-x^3+3x-3)}{\left(x^2-1\right)^2} \\ &= \frac{2x\,g(x)}{\left(x^2-1\right)^2} \end{aligned}$$

3. Le dénominateur est un carré, il est toujours strictement positif et sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$, x est strictement négatif. $f'(x)$ a donc le signe contraire de $g(x)$ que nous avons établi dans la partie 1. On a donc le tableau de variation suivant :

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Hors barème

On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha)+3\alpha &= \frac{3-2\alpha^3+3\alpha\left(\alpha^2-1\right)}{\alpha^2-1} \\ &= \frac{3-2\alpha^3+3\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1} \\ &= \frac{\alpha^3-3\alpha+3}{\alpha^2-1} \\ &= \frac{-g(\alpha)}{\alpha^2-1} \\ &= 0 \qquad \text{car } g(\alpha)=0 \end{aligned}$$

On en déduit que $f(\alpha) = -3\alpha$

$$\begin{array}{ll} \text{or} & -2,11 < \alpha < -2,1 \\ \text{donc} & -2,11 \times (-3) > \alpha \times (-3) > -2,1 \times (-3) \\ & 6,33 > 3\alpha > 6,3 \\ & 6,3 < f(\alpha) < 6,33 \end{array}$$

Exercice N°5 :

Partie A

1. g est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
   $g'(x)$ est un trinôme du second degré qui admet pour racines -1 et 1.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x - 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.
   On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$dr+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$, g admet pour maximum -1 donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.
   Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, g est continue, strictement croissante et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.
   α est donc l'unique solution de $g(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
3. On obtient par balayage $g(2,1) \simeq -0,039$ et $g(2,11) \simeq 0,064$ donc $g(2,1) < 0 < g(2,11)$, par conséquent $2,1 < \alpha < 2,11$.

4. On en déduit le tableau de signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. f est une fonction rationnelle.
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$$
   $\mathscr{C}_f$ admet donc deux asymptotes verticales d'équations $x = -1$ et $x = 1$.
2. On a $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$.
   On dresse le tableau de signe de $x^2 - 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to -1} (2x^3+3) = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1} (2x^3+3) = 5$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$.

3. f est une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition.
   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{6x^2(x^2-1)-(2x^3+3)(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x(x^3-3x-3}{(x^1-1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $(x^2-1)^2 > 0$, $f'(x)$ a donc le même signe que $2xg(x)$.
   On étudie donc le signe du produit $2xg(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2xg(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. Voir graphique ci-dessous.
2. La courbe admet des tangentes horizontales aux points d'abscisse 0 et α.
3. (a) Voir graphique ci-dessous.
   (b) On étudie le signe de $f(x) - 2x$.
   $$f(x) - 2x = \frac{2x^3+3}{x^2-1} - 2x = \frac{2x^3+3-2x(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2x+3}{x^2-1}.$$
   Tableau de signe de $f(x) - 2x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-1		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-2x$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

$\mathscr{C}_f$ est donc au dessus de Δ sur les intervalles $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ et $]1;+\infty[$,

elle est en dessous sur les intervalles $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$ et $]-1;1[$,

elle coupe Δ au point d'abscisse $-\dfrac{3}{2}$.

(c) $f(x)-2x=\dfrac{2x+3}{x^2-1}$, la fonction $x\mapsto\dfrac{2x+3}{x^2-1}$ est une fonction rationnelle.

$\lim x\to+\infty[f(x)-2x]=\lim x\to+\infty\dfrac{2x}{x^2}=\lim x\to+\infty\dfrac{2}{x}=0.$