Terminale	Série 3 : Etude de fonction	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

1) Soit le polynome P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

   a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynome P

   b) Déterminer les variations de P sur $\mathbb{R}$.

   c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-1, 0]$.

   d) Donner un encadrement de α à 10^{-5}

   e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \dfrac{2}{x^2 + 1}$

   On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

   a) Déterminer la dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \dfrac{(x+1)P(x)}{(x^2+1)^2}$

   b) A l'aide de la question 1e) déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f

Exercice N°2 :

1) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

   a) Déterminer u', la fonction dérivée de u, puis dresser le tableau de variation de la fonction u. On donne $u\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{19}{27}$.
   (On ne demande pas de calculer les limites en l'infini.)

   b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

   c) À l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement à 10^{-4} de α. On donnera le nombre de boucles nécessaires à cet encadrement.

   d) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x-1}$

   a) Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et 1.

   b) Déterminer f' la fonction dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$

   c) Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R} - \{1\}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f. On donne $f(\alpha) \approx 4,219$

   d) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Donner un encadrement à 10^{-2} de β.

e) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x^2$.

Pourquoi peut-on dire que la parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$?

On donne l'algorithme ci-contre. Que calcule cet algorithme ? Qu'affiche-t-il comme résultat ?

Variables : X : entier
Entrées et initialisation
| X prend la valeur 2
Traitement
| **tant que** $\frac{1}{X-1} \geqslant 10^{-3}$ **faire**
| | X prend la valeur $X + 1$
| **fin**
Sorties : Afficher X

Exercice N°3 : Fonction rationnelle et fonctions auxiliaire

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 1cm)

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

On pose : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-2; 0]$

c) Déterminer un encadrement à 10^{-3} à l'aide de votre calculatrice.

d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

2) **Étude de la fontion f**

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = \dfrac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2 + 1)^2}$

c) À l'aide d'un tableau de signe donner le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) En écrivant $f(x) = \dfrac{x(x^3 - 4)}{x^3 + x}$, montrer alors que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$

e) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

f) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = x$?

3) **Représentation de la fonction f**

a) Recopier puis remplir le tableau de valeurs suivants :

x	-4	$-2,5$	-1	0	1	2	4
$f(x)$							

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ en indiquant les tangentes horizontales et en s'aidant du tableau de valeurs de la question précédente.

Exercice N°4 :

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -x^3 + 3x - 3.$$

1. Étudier les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

2. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Justifier

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,-1[$ par

$$f(x) = \frac{3-2x^3}{x^2-1}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan .
On admettra que f est dérivable sur son domaine de définition.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition et en déduire les équations des asymptotes éventuelles.

2. Montrer que pour tout réel $x < -1$ on a :

$$f'(x) = \frac{x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$$

3. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
On ne cherchera pas à calculer $f(\alpha)$.

Bonus Prouver que $f(\alpha) = 3\alpha$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$

Exercice N°5 :

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de f.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les limites de f en -1 et en 1. Interpréter graphiquement ces limites.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f'(x) = \dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

Partie C

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f.

1. Tracer sur ce graphique les asymptotes de $\mathscr{C}_f$.
2. Placer sur le graphique le point A de la courbe d'abscisse α et les tangentes parallèles à l'axe des abscisses.
3. (a) Tracer sur le graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$.
   (b) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
   (c) Étudier la limite de $f(x) - 2x$ en $+\infty$.