Terminale | **Correction série 3 : Probabilité et loi binomiale** | **OMRI Rafik**

Exercice N°1 :

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

— la formation avec *conduite accompagnée*;
— la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

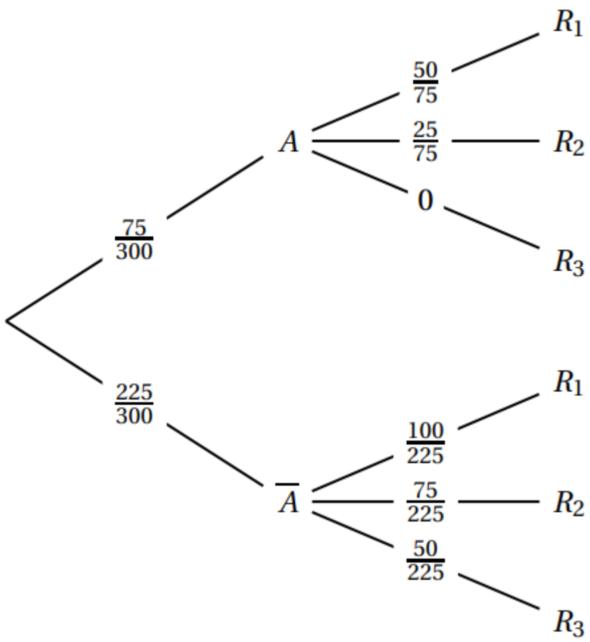
— 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée*; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
— 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle*; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les évènements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* »;
R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation »;
R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation »;
R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. On modélise la situation par un arbre pondéré.



2. **a.** La probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation est :
$P(A \cap R_2) = P(A) \times P_A(R_2) = \frac{75}{300} \times \frac{25}{75} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}$.

b. La probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $P(R_2)$..
D'après la formule des probabilités totales :
$P(R_2) = P(A \cap R_2) + P\left(\overline{A} \cap R_2\right) = \dfrac{25}{300} + \dfrac{125}{300} \times \dfrac{75}{125} = \dfrac{25}{300} + \dfrac{75}{300} = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$.

c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. La probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* est :

$$P_{R_2}(A) = \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.

a. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$P(R_1)$	$P(R_2)$	$P(R_3)$

- $P(R_1) = P(A \cap R_1) + P\left(\overline{A} \cap R_1\right) = \dfrac{75}{300} \times \dfrac{50}{75} + \dfrac{225}{300} \times \dfrac{100}{225} = \dfrac{50}{300} + \dfrac{100}{300} = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2}$
- $P(R_2) = \dfrac{1}{3}$
- $P(R_3) = P(A \cap R_3) + P\left(\overline{A} \cap R_3\right) = 0 + \dfrac{225}{300} \times \dfrac{50}{225} = \dfrac{50}{300} = \dfrac{1}{6}$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b. L'espérance de cette variable aléatoire est : $E(X) = \sum(x_i \times p_i) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{3} + 3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3} \approx 1,67$.

Cela veut dire que le nombre de passages pour réussir l'examen est en moyenne de 1,67.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

a. On cherche un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

$P(R_3) = \frac{1}{6}$ donc $P\left(\overline{R_3}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Le nombre $\frac{5}{6}$ est donc la probabilité de l'événement « R_1 ou R_2 », c'est-à-dire la probabilité qu'une personne prise au hasard réussisse l'examen à la première tentative ou à la deuxième.

La probabilité que n personnes réussissent l'examen à la première ou à la deuxième tentative est de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

L'événement de probabilité $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ est l'événement contraire du précédent, donc correspond à l'événement « au moins une personne n'a pas réussi l'examen à la première ou à la deuxième tentative », c'est-à-dire « au moins une personne a réussi l'examen à la troisième tentative ».

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

b. La valeur renvoyée par **seuil**(0.9) est la première valeur de n pour laquelle $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$.

On résout cette inéquation :

$$1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^n > 0,9 \iff 0,1 > \left(\tfrac{5}{6}\right)^n \iff \ln(0,1) > \ln\left(\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\right) \iff \ln(0,1) > n \ln\left(\tfrac{5}{6}\right) \iff \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} < n$$

$\dfrac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12,6$ donc la commande **seuil**(0.9) renvoie la valeur 13.

Il faut donc prendre $n = 13$ personnes sur les 300 pour que la probabilité d'en avoir une qui a réussi l'examen à sa troisième tentative soit supérieure à $0,9$.

Exercice N°2 :

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

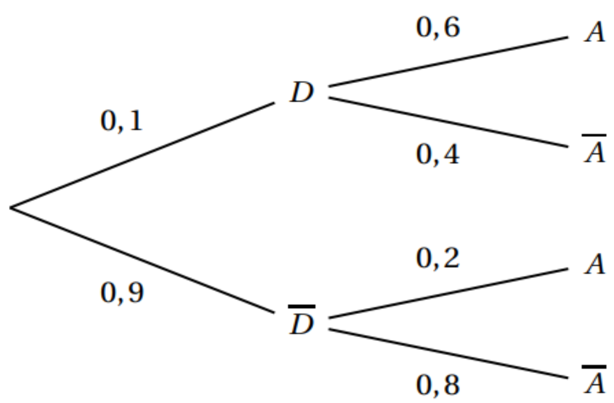
- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie I

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènement D et A respectivement.

1. On traduit la situation par un arbre pondéré :



2. La probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école est :
$P(D \cap A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06.$
3. La probabilité de l'évènement A est $P(A)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24.$
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. La probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné est :
$P_A(\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,24} = 0,75.$

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
La probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $p = 0,24$, et on choisit un échantillon de 7 candidats donc $n = 7$.
La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(7\,;\,0,24)$.

b. La probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école est :
$P(X=1) = \binom{7}{1} \times 0,24^1 \times (1-0,24)^{7-1} \approx 0,32.$

c. La probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école est : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0,47 = 0,53$.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

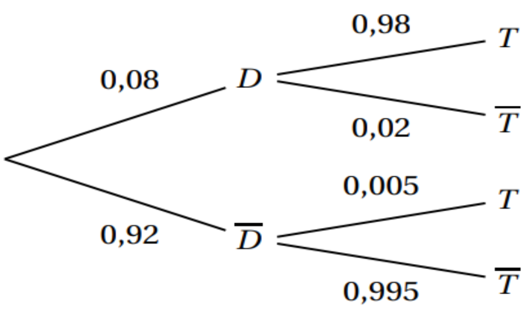
a. La variable aléatoire Y qui donne le nombre d'admis parmi les n candidats présentés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,24)$.
La probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école est :
$P(Y=0) = \binom{n}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n.$

b. On cherche à partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0,99$.
On veut donc que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$ c'est-à-dire $1 - P(Y=0) \geqslant 0,99$ ou encore $P(Y=0) \leqslant 0,01$. On résout l'inéquation d'inconnue n : $0,76^n \leqslant 0,01$:
$0,76^n \leqslant 0,01 \iff \ln(0,76^n) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,76) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)}$
Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,8$ donc c'est à partir de 17 élèves que la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0,99$.

Exercice N°3 :

Partie A

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right)$: or
$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784$ et
$P\left(\overline{D} \cap T\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,00460$. Donc :
$P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083$.

3. **a.** La probabilité conditionnelle $P_T(D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0784}{0,083} \approx 0,9445$, soit 0,945 au millième près.

b. D'après la question précédente $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. **a.** Quel que soit l'athlète choisi la probabilité que cet athlète présente un test positif est $0,103$. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

   b. On sait que $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$: ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

   c. La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :

   $0,103^0 \times (1-0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807$ soit environ 0,581 au millième près.

   Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :

   $1-0,581$, soit 0,419 au millième près.

2. On a pour n athlètes contrôlés, $P(X=0) = 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$.

   Il faut donc trouver n tel que :

   $1-0,897^n \geqslant 0,75 \iff 1-0,75 \geqslant 0,897^n \iff 0,25 \geqslant 0,897^n$.

   La calculatrice donne le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inéquation : pour $n = 13$, on a $0,897^{13} \approx 0,243$.

   Il faut donc contrôler 13 athlètes en moyenne pour en trouver un positif.

Exercice N°4 :

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

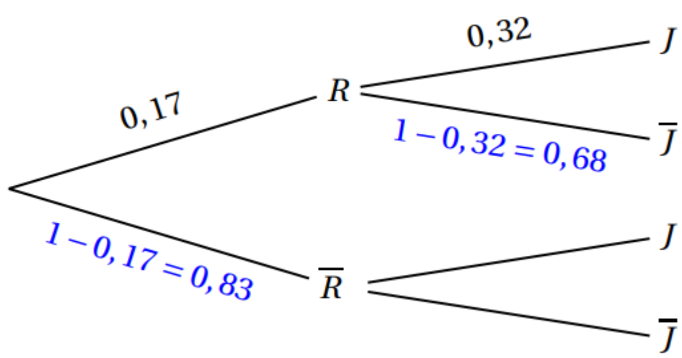
Partie A

On interroge une personne au hasard et on note :

— R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».

— J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. On représente la situation à l'aide de cet arbre pondéré :



2. $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544$

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française, donc $P(J) = 0,11$.

La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $P\left(\overline{R} \cap J\right)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(J) = P(R \cap J) + P\left(\overline{R} \cap J\right)$ donc $P\left(\overline{R} \cap J\right) = P(J) - P(R \cap J) = 0,11 - 0,0544 = 0,0556$ soit $0,056$ à 10^{-3} près.

4. $P_{\overline{R}}(J) = \dfrac{P\left(\overline{R} \cap J\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0,056}{0,83} \approx 0,0675$

La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ 6,75 %.

Partie B

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1.
- On interroge une personne au hasard et il n'y a que deux possibilités : elle utilise régulièrement les transports en commun, avec une probabilité $p = 0,17$, ou pas, avec une probabilité de $1 - p = 0,83$.
- On réalise $n = 50$ fois ce questionnement de façon identique.

Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,17$.

2. $P(X = 5) = \dbinom{50}{5} \times 0,17^5 \times (1 - 0,17)^{50-5} \approx 0,069$

Il y a donc une probabilité de 0,069 que, sur 50 personnes interrogées, exactement 5 prennent régulièrement les transports en commun.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

Autrement dit, le recenseur affirme que $P(X < 13) \geqslant 0,95$.

Or $P(X < 13) = P(X \leqslant 12) \approx 0,929 < 0,95$ donc cette affirmation est fausse.

4. Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est $E(X) = np = 50 \times 0,17 = 8,5$.