Terminale	**Série 3** : Vecteurs, droites et plans l'espace	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2\,;-1\,;\,0), B(3\,;-1\,;\,2), C(0\,;\,4\,;\,1) \text{ et } S(0\,;\,1\,;\,4).$$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2) a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c) Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3) Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

   b) Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2\,;2\,;3)$.

4) On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

   Calculer le volume du tétraèdre SABC.

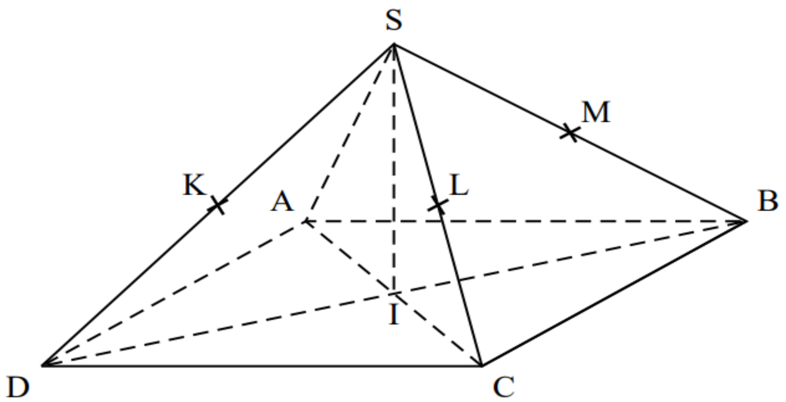
5) a) Calculer la longueur SA.

   b) On indique que $SB = \sqrt{17}$.

   En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

Exercice N°2 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1) Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{IC}},\,\overrightarrow{\mathrm{IB}},\,\overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.

2) Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

3) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4) Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases}x=-1-t\\y=t\\z=-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=0\\z=1+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

c. $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

5) Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ **b.** $x+y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

Exercice N°3 :

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ d'unité 1 km, le plan $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ représentant le sol.

Les deux routes aériennes à contrôler sont représentées par deux droites $\mathscr{D}_1$, et $\mathscr{D}_2$ dont on connaît des représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}_1:\begin{cases}x=3+a\\y=9+3a\\z=2\end{cases},\ a\in\mathbb{R}\qquad\text{et}\qquad\mathscr{D}_2:\begin{cases}x=0,5+2b\\y=4+b\\z=4-b\end{cases},\ b\in\mathbb{R}$$

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de $\mathscr{D}_1$ et celles d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de $\mathscr{D}_2$.

b. Prouver que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires.

c. Vérifier que le point de coordonnées $(3\,;\,4\,;\,0,1)$ n'appartient ni à $\mathscr{D}_1$ ni à $\mathscr{D}_1$.

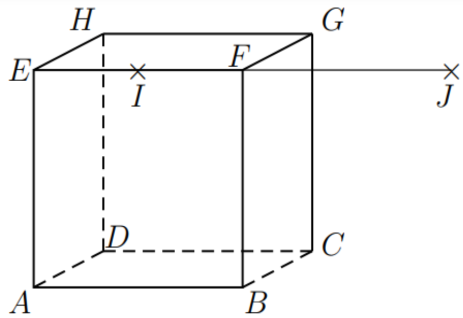
2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $\mathrm{S}(3\,;\,4\,;\,0,1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée Δ. On note $\mathscr{P}_1$ le plan contenant S et $\mathscr{D}_1$, et $\mathscr{P}_2$ le plan contenant S et $\mathscr{D}_2$.

a. Déterminer deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_1$ puis démontrer que $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{P}_1$ sont sécants.

b. Déterminer deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_2$ puis démontrer que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de Δ pour que cette droite coupe chacune des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
Cette affirmation est-elle vraie? Justifier la réponse

Exercice N°4 :



On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1, I est le milieu de $[EF]$ et J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tous les exercices, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a) Par lecture graphique, donner les coordonnées de I et J.
   b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   c) Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   d) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   b) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.
   Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).
3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   a) Calculer le volume de la pyramide $FBGI$.
   b) En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice N°5 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1) Vérifier que le point $A(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite d_1.

2) Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3) Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$, et passant par le point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.