Terminale	Série 4 : Loi binomiale	OMRI Rafik

Correction

Exercice N°1 :

1.	Après avoir choisi un moteur, il tombe en panne ou pas : c'est un épreuve de Bernoulli. Les choix des 20 moteurs sont considérés indépendants. On est donc dans la situation où l'on répète 20 fois une épreuve de Bernoulli indépendantes. La variable aléatoire X qui compte les moteurs tombant en panne durant la première année suivant l'achat (succès) suit donc une loi binomiale de paramètres 20 et 0,12.
2.	$P(X=2)=\binom{20}{2}\times 0,12^2\times 0,88^{18}\approx 0,274$
3.	« Au moins 1 moteur tombe en panne ... » est l'événement $(X\geqslant 1)$. $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0,88^{20}\approx 0,922$
4.	$E(X)=np=20\times 0,12=2,4$

Exercice N°2 :

.1.a	Chaque partie de ce second jeu est une épreuve de Bernoulli : on gagne ou l'on perd. On répète de manière indépendante 10 épreuves de Bernoulli, donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de parties gagnées suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et 1/4.
.1.b	$(X=0)$ et $(X\geqslant 1)$ sont des événements contraires donc : $p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\approx 0,944$
.1.c	$X\hookrightarrow\mathcal{B}(10;\frac{1}{4})$ donc $E(X)=np=10\times\frac{1}{4}=2,5$. Un joueur a en moyenne « l'espoir » de gagner 2,5 parties sur 10 parties jouées.
.2.a	L'espérance de gain du joueur est $E(X)\times 8=20$€, alors que son engagement pour 10 parties est 30€. Le joueur perdrait en moyenne 10€.
.2.b	Pour un bénéfice supérieur à 40€, compte-tenu de l'engagement de 30€, il faut gagner au moins 9 parties ($9\times 8-30>40$) $p(X\geqslant 9)=p(X=9)+p(X=10)=\binom{10}{9}0,25^9\times 0,75+0,25^{10}\approx 0,00003$

Exercice N°3 :

1) X suit une loi binomiale si les 80 expériences consistant à tirer au hasard un client parmi les 80 sont identiques et indépendantes.
   X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(80\ ;\ 0,25)$

2) $p(X=20)=\binom{80}{20}\times 0,25^{20}\times 0,75^{60}=$ binomFdp(80 , 0.25 , 20) $\approx 0,103$

3) $p(X\geqslant 25)=1-p(X\leqslant 24)=1-$ binomFrép(80 , 0.25 , 24) $\approx 0,124$

4) $p(15\leqslant X\leqslant 25)=p(X\leqslant 25)-p(X\leqslant 14)$
   $=$ binomFrép(80 , 0.25 , 25) $-$ binomFrép(80 , 0.25 , 14) $\approx 0,846$

Exercice N°4 :

1) Comme on envoie 8 bits de façon identique et indépendante, le nombre de bits mal transmis, X, suit une loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0,01)$.

1) Comme on envoie 8 bits de façon identique et indépendante, le nombre de bits mal transmis, X, suit une loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0,01)$.

2) $p(X=2)=\binom{8}{2}\times 0,01^2\times 0,99^6=\text{binomFdp}(8\ ,\ 0.01\ ,\ 2)\approx 0,002\,6.$

3) $p(X\geqslant 3)=1-p(X\leqslant 2)=1-\text{binomFRép}(8\ ,\ 0.01\ ,\ 2)\approx 5,39\times 10^{-5}$

La probabilité d'avoir au moins 3 bits mal transmis est égal à 0,000 1 à la précision de 10^{-4}, donc ce cas est très marginal et n'est pas à envisager.

Exercice N°5 :

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

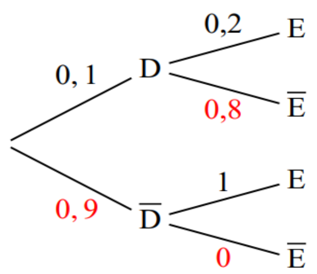
1) a) X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0,1)$.

b) $p(\text{A})=p(X=0)=\binom{8}{0}\times 0,1^0\times 0,9^8=0,9^8\approx 0,430$

$p(\text{B})=p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-0,9^8\approx 0,570.$

$p(\text{C})=p(X=2)=\binom{8}{2}\times 0,1^2\times 0,9^6\approx 0,149.$

2) a) $p_{\text{D}}(\text{E})=0,2$ et $p_{\overline{\text{D}}}(\text{E})=1$. On obtient l'arbre suivant :



b) $p(\text{E})=p(\text{E}\cap\text{D})+p(\text{E}\cap\overline{\text{D}})=p(\text{D})p_{\text{D}}(\text{E})+p(\overline{\text{D}})p_{\overline{\text{D}}}(\text{E})=0,1\times 0,2+0,9\times 1=0,92$

c) $p_{\text{E}}(\text{D})=\dfrac{p(\text{D}\cap\text{E})}{p(\text{E})}=\dfrac{0,02}{0,92}\approx 0,022$

3) Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0,022)$

a) $p(Y=0)=\binom{8}{0}\times 0,022^0\times 0,978^8=0,978^8\approx 0,837.$

b) La probabilité du zéro défaut a été nettement amélioré passant de 0,430 à 0,837 soit presque le double.

Exercice N°6 :

1) X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(20\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$

2) $p(X=10)=\binom{20}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20}\approx 0,176$

3) $p(5\leqslant X\leqslant 10)=p(X\leqslant 10)-p(X\leqslant 4)$
$=\text{binomFRép}(20, 0.5, 10)-\text{binomFRép}(20, 0.5, 4)$
$\approx 0,582$

Exercice N°7 :

1) Les interrogations se font de manière indépendante les unes des autres et à chaque interrogation la probabilité d'avoir une fille est $\frac{20}{30}$ soit $\frac{2}{3}$ donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{3}$.

2) Pour $n = 10$

$p(X = 4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 210 \times \frac{16}{81} \times \frac{1}{729} \approx \boxed{0{,}057}$

$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \approx \boxed{0{,}980}$

3) On cherche n tel que $p(X = 0) \leq 0{,}001$ or $p(X = 0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$.

$p(X = 0) \leq 0{,}001 \Leftrightarrow \frac{1}{3^n} \leq 0{,}001 \Leftrightarrow 3^n \geq \frac{1}{0{,}001} \Leftrightarrow 3^n \geq 1000$

A l'aide d'un tableau de valeur de la calculatrice, on a $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$ donc $n \geq 7$

Il faut donc interroger pendant au moins 7 jours consécutifs pour que la probabilité de n'avoir aucune fille soit inférieure à 0,001.

Exercice N°8 :

1. Epreuve de Bernoulli : On choisit un passager. S : « Il se présente »
$p = 0{,}95$. On répète cette expérience 70 fois de façons identiques et indépendantes. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 70$ et $p = 0{,}95$.

2. Au moins une place libre dans l'avion donc au plus 69 places occupées (c'est-à-dire au plus 69 personnes qui se sont présentées) :
$P(X \leq 69) \approx 0{,}102$

3. $E(X) = 70 \times 0{,}95 = 66{,}5$. En moyenne 66,5 personnes se sont présentées ainsi la recette moyenne est de : $66{,}5 \times 90 = 5985$ €

C. Avec surbooking

1. Epreuve de Bernoulli : On choisit un passager. S : « Il se présente »
$p = 0{,}95$. On répète cette expérience 80 fois de façons identiques et indépendantes. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 80$ et $p = 0{,}95$.

2. $P(X \leq 69) \approx 0{,}002$

3. Il y a au moins un voyageur ayant réservé et ne pouvant pas embarquer, c'est-à-dire qu'il y a plus de 71 personnes à s'être présentées :
$P(X \geq 71) = 1 - P(X \leq 70) \approx 0{,}993$

4. $E(X) = 80 \times 0{,}95 = 76$. En moyenne 76 personnes se sont présentées donc 6 seront indemnisés.
La recette moyenne est de : $70 \times 90 - 6 \times 45 = 6030$ €