Terminale | Série 1 : Dérivation (Rappel) | OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Correction

1) $f(x)=3x^4-\frac{15}{2}x^2-5x+7$. Alors $f'(x)=3\times 4x^{4-1}-\frac{15}{2}\times 2x^{2-1}-5=12x^3-15x-5$.

Par conséquent, $\boldsymbol{f'(x)=12x^3-15x-2}$.

2) $g(x)=\frac{3}{x}-\frac{4}{5x^3}=3\times\frac{1}{x}-\frac{4}{5}\times x^{-3}$. Alors $g'(x)=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{4}{5}\times\left(-3x^{-3-1}\right)=-\frac{3}{x^2}+\frac{12}{5}x^{-4}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{g'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{12}{5}\times\frac{1}{x^4}}$.

3) $h(x)=(3x+1)\left(x^2+x\right)$.

On a : $h=u\times v$ avec $u(x)=3x+1$ et $v(x)=x^2+x$.

D'où : $h'=u'\times v+u\times v'$ avec $u'(x)=3$ et $v'(x)=2x+1$.

Par suite, $h'(x)=3\left(x^2+x\right)+(3x+1)(2x+1)=3x^2+3x+6x^2+3x+2x+1=9x^2+8x+1$

Par conséquent, $\boldsymbol{h'(x)=9x^2+8x+1}$.

Exercice N°2 :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ car une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

$$f'(x)=1-\frac{4}{(2x+3)^2}=\frac{(2x+3)^2-4}{(2x+3)^2}=\frac{(2x+3-2)(2x+3+2)}{(2x+3)^2}=\frac{(2x+1)(2x+5)}{(2x+3)^2}$$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

$f(x)=4(6x-1)(3x^2-x+1)^3$ car $(u^n)'=n\,u'u^{n-1}$

3) f est dérivable si $3x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$. f est donc dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

$$f'(x)=\sqrt{3x+1}+x\times\frac{3}{2\sqrt{2x+3}}=\frac{2(3x+1)+3x}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{9x+2}{2\sqrt{3x+1}}$$

Exercice N°3 :

1) a) On dérive avec $(x^n)'=nx^{n-1}$ $f'(x)=-3x^2+\frac{5}{2}x-2$

b) On dérive avec $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$g'(x)=\frac{x^2+5-2x(x-4)}{(x^2+5)^2}=\frac{x^2+5-2x^2+8x}{(x^2+5)^2}=\frac{-x^2+8x+5}{(x^2+5)^2}$$

c) On dérive avec $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ et $(u^n)'=nu'u^{n-1}$

$$h'(x)=\frac{-2\times 5(-1)(2-x)^4}{(2-x)^{10}}=\frac{10}{(2-x)^6}$$

2) a) Pour dériver la fonction f, elle doit être non nulle donc $D_{f'} = \left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$

b) On dérive avec $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

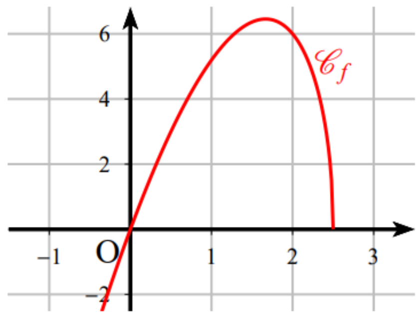
$$f'(x) = 3\sqrt{-2x+5} + 3x\frac{-2}{2\sqrt{-2x+5}} = 3\sqrt{-2x+5} - \frac{3x}{\sqrt{-2x+5}}$$

$$= \frac{3(-2x+5)-3x}{\sqrt{-2x+5}} = \frac{-6x+15-3x}{\sqrt{-2x+5}} = \frac{-9x+15}{\sqrt{-2x+5}} = \frac{-3(3x-5)}{\sqrt{-2x+5}}$$

c) $f'(x) = 0 \iff 3x-5=0 \iff x = \dfrac{5}{3}$

signe de $f'(x)$ = signe de $-3(3x-5)$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx 6{,}45$	$\searrow$	0



Exercice N°4 :

1) a) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - 2x \times x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(3x^2-3-2x^2)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

b) $f'(x) = 0 \iff x^2 = 0$ ou $x^2 = 3 \iff x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$

2) a) La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ du fait de la fonction racine (le dénominateur ne s'annulant pas) et si $x > 0 \Rightarrow x \neq -1$

b) $g'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \dfrac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

c) $g'(x) = 0 \iff -x+1 = 0 \iff x = 1$

Le signe de $g'(x)$ est donné par le signe de $(-x+1)$ car $x > 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Exercice N°5 :

1) $f_1(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}$ forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f_1{}'(x) = \frac{2(x^2-9)-4x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{2x^2-18-4x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{-2x^2-18}{(x^2-9)^2} = \frac{-2(x^2+9)}{(x^2-9)^2}$$

2) $f_2(x) = x\sqrt{x+3}$ forme $(uv)' = u'v + uv'$

$$f_2'(x) = \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

3) $f_3(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{x-3}$ forme $(u+v)' = u' + v'$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

$$f_3'(x) = 2 - \frac{2}{(x-3)^2} = \frac{2(x-3)^2 - 2}{(x-3)^2} = \frac{2\left[(x-3)^2 - 1\right]}{(x-3)^2} = \frac{2(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}$$

4) $f_4(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x+3}$ forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et $(uv)' = u'v + uv'$

$$f_4'(x) = \frac{\left(\sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}\right)(x+3) - x\sqrt{x}}{(x+3)^2} = \frac{(2\sqrt{x} + \sqrt{x})(x+3) - 2x\sqrt{x}}{2(x+3)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}(x+3) - 2x\sqrt{x}}{2(x+3)^2} = \frac{\sqrt{x}(3x+9-2x)}{2(x+3)^2} = \frac{\sqrt{x}(x+9)}{2(x+3)^2}$$