Terminale	**Série 1** : Continuité des fonctions	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ -\,\mathrm{e}^{x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est égale sur cet intervalle à $x \longmapsto x^2 - 1$ qui est une fonction polynôme.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle est égale sur cet intervalle à $x \longmapsto -\,\mathrm{e}^{x^2}$ qui est continue car de la forme $k\,\mathrm{e}^{u}$ avec u continue.
- Il reste à étudier la continuité en 0. Pour cela on calcule les limites à droite et à gauche .

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\,\mathrm{e}^{x^2} = -1 \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^2 - 1 = -1 \end{cases} \implies f \text{ est continue en } 0 \text{ car les limites à droite et à gauche sont égales.}$$

Exercice N°2 :

1. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x} + 3\right) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 3\right) = 3$.

   Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $-\dfrac{1}{x} + 3 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x} + 3$.

   On en conclut, par encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

   (b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(-\dfrac{1}{x} + 3\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\dfrac{1}{x} + 3\right) = +\infty$.

   On ne peut rien en déduire quant à la limite de f en 0.

2. (a) Pour tout $x \in]2; +\infty[$:

   $$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+5} - 3)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \frac{x^2 + 5 - 9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)}$$
   $$= \frac{x^2 - 4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5} + 3}.$$

   (b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5} - 3} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice N°3 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & x \neq -1 \\ m & x = -1 \end{cases}$$

<u>sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$</u> f continue comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ car $x + 1 \neq 0$

<u>en -1</u> $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$

$x \neq -1$

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x-1) = -2$ or $f(-1) = m$

Pour que f soit continue il faut que $m = -2$

alors f continue en -1 et donc sur $\mathbb{R}$

Exercice N°4 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{2x-1}{3x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

* f continue sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ comme composées et quotients de fonctions continues

* en 1 : $f(1) = \dfrac{2-1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

pour $x > 1$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \times \dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$

$$= \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

donc $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{4} = f(1)$ Par composée, somme et quotient

f est donc continue en 1

* Alors f est continue sur $[0;+\infty[$

Exercice N°5 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+3} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \ (x \neq 0) \end{cases}$$

sur $\mathbb{R}^*$

1) • f continue sur $]1;+\infty[$ comme composée de fonctions continues et f continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$ (fonction inverse)

• en 1 ? $f(1) = 1$ et $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+3} = 1 = f(1)$

donc f est continue en 1

Alors f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$