Terminale	Série 1 : Convexité	OMRI Rafik

Correction

Exercice N°1 :

xercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = (3-x)e^x + 1$.

1. On a $f = uv + 1$, avec $u(x) = 3 - x$ donc $u'(x) = -1$, et $v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$.
   On trouve donc $f' = u'v + uv' + 0$, soit $f'(x) = -e^x + (3-x)e^x = (2-x)e^x$.

   On recommence : $f' = uv$, avec $u(x) = 2 - x$ donc $u'(x) = -1$, et $v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$.
   On trouve donc $(f')' = f'' = u'v + uv'$, soit $f''(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$.
2. Les variations de f sont données par le signe de sa dérivée f' :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	e^2+1	$\searrow$	

3. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $[3;4]$ où elle est strictement décroissante, avec de plus $f(3) = 1 > 0$ et $f(4) = -e^4 + 1 < 0$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou plus précisément ici de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha \in [3;4]$.
4. a) $T : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -e^3(x-3) + 1$,

   b) T coupe l'axe des abscisses à l'abscisse x telle que $y = 0 \iff -e^3(x-3)+1 = 0 \iff x = 3+e^{-3}$

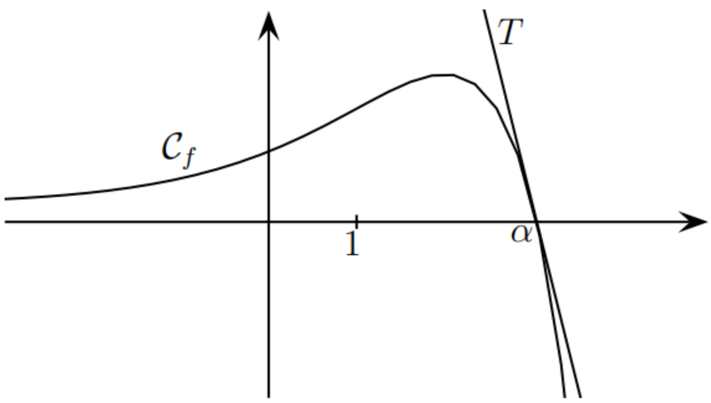
   c) La convexité de f est donnée par le signe de sa dérivée seconde :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

   Ainsi, f est convexe sur $]-\infty;1[$ et concave sur $]1;+\infty[$.

   d) On a $\alpha \in [3;4]$, or f est concave sur cet intervalle, et donc f y est au-dessous de ses tangentes. En particulier, le point $(\alpha; f(\alpha))$ de la courbe (avec $f(\alpha) = 0$) est en-dessous du point de la tangente T au point d'abscisse α :

$$
\begin{aligned}
& 0 = f(\alpha) \leqslant -e^3(\alpha-3)+1 \\
\iff\quad & \alpha \leqslant \frac{1}{e^3} + 3 \simeq 3,0498 < 3,05
\end{aligned}
$$



Exercice N°2 :

Partie A.

1. On a $h(0) = g(-0) = g(0) = 1$.
2. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $h'(x) = -g'(-x) = -(-g(-x)) = g(-x) = h(x)$.
3. L'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$ est le fonction exponentielle donc, d'après les questions précédentes, pour tout réel x, $h(x) = e^x$. On en déduit que, pour tout réel x, $g(x) = h(-x) = e^{-x}$.

Partie B.

1. **a.** Pour tout réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$ donc $[f'(x)]^2 = [f(x)]^2 + 1$. Comme le carré d'un réel est positif ou nul, on en déduit que, pour tout réel x, $[f'(x)]^2 \geqslant 1$. En particulier, pour tout réel x, $[f'(x)]^2 \neq 0$ donc $f'(x) \neq 0$.

   b. Pour tout réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$ donc $[f'(x)]^2 - 1 = [f(x)]^2$. En particulier, pour $x = 0$, $[f'(0)]^2 - 1 = [f(0)]^2$. Or, par hypothèse, $f'(0) = 1$ donc $[f(0)]^2 = 1^2 - 1 = 0$ et donc $f(0) = 0$.

2. Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, les fonctions f^2 et f'^2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, en dérivant l'égalité de $(*)$, il vient : pour tout réel x, $2f''(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) = 0$ i.e. $2f''(x)f'(x) = 2f'(x)f(x)$. Or, pour tout réel x, $2f'(x) \neq 0$ d'après la question **1.a.** donc, pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$.

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

   a. On a $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = -1$.

   b. Comme f et f' sont dérivables sur $\mathbb{R}$, u et v le sont aussi. De plus, $u' = (f' + f)' = f'' + f' = f + f' = u$ et $v' = (f' - f)' = f'' - f = f - f' = -v$ car, d'après la question **2.**, $f'' = f$.

   c. La fonction u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $u(0) = 1$ et $u' = u$ donc, par théorème, $u = \exp$. De plus, v est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $v(0) = 1$ et $v' = -v$ donc, d'après la **Partie A**, $v : x \longmapsto e^{-x}$.

   d. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $f'(x) + f(x) = e^x$ et $f'(x) - f(x) = e^{-x}$ donc, en soustrayant membre à membre ces deux égalités, il vient $f'(x) + f(x) - (f'(x) - f(x)) = e^x - e^{-x}$ i.e. $2f(x) = e^x - e^{-x}$.

   On conclut donc que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Partie C.

1. Pour tout réel x, on sait que $f''(x) = f(x)$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^{-x} \Leftrightarrow x \geqslant -x \Leftrightarrow 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

   Ainsi, $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ et $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [-\infty\,;0[$.
   On en déduit que f est concave sur $[-\infty\,;0[$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$. La courbe de f présente donc un point d'inflexion à l'abscisse 0 i.e. au point de coordonnées $(0\,;0)$.

2. Par théorème, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Par différence et quotient par une constante positive, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par théorème, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. Par différence et quotient par une constante positive, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on en déduit que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit m un nombre réel.

a. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $m \in \left]\lim\limits_{-\infty} f\,;\lim\limits_{+\infty} f\right[$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α_m tel que $f(\alpha_m) = m$.
Ainsi, α_m est l'unique solution de l'équation $f(x) = m$ dans $\mathbb{R}$.

b. Pour tout réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$ donc, en particulier, $[f'(\alpha_m)]^2 - [f(\alpha_m)]^2 = 1$ i.e. $[f'(\alpha_m)]^2 - m^2 = 1$ donc $[f'(\alpha_m)]^2 = m^2 + 1$. Or, on a vu que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc $f'(\alpha_m) = \sqrt{m^2+1}$. De plus, on a vu que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = u(x) = f'(x) + f(x)$ donc $\mathrm{e}^{\alpha_m} = f'(\alpha_m) + f(\alpha_m)$ i.e. $\mathrm{e}^{\alpha_m} = m + \sqrt{m^2+1}$.
Autre méthode. Par définition, $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha_m} - \mathrm{e}^{-\alpha_m}}{2} = m$ donc $\mathrm{e}^{\alpha_m} - \mathrm{e}^{-\alpha_m} = 2m$ i.e. $\mathrm{e}^{\alpha_m} - 2m - \mathrm{e}^{-\alpha_m} = 0$. En multipliant par e^{α_m}, on en déduit que $\mathrm{e}^{2\alpha_m} - 2m\mathrm{e}^{\alpha_m} - 1 = 0$.
Ainsi, e^{α_m} est solution de l'équation du second degré $X^2 - 2mX - 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2m)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4m^2 + 4 = 4(m^2+1) >$ donc cette équation possède deux solutions réelles :

$$X_2 = \frac{-(-2m) - \sqrt{4(m^2+1)}}{2 \times 1} = \frac{2m - 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m - \sqrt{m^2+1}$$

et

$$X_1 = \frac{-(-2m) + \sqrt{4(m^2+1)}}{2 \times 1} = \frac{2m + 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m + \sqrt{m^2+1}$$

Or, $m^2 + 1 > m^2$ donc par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{m^2+1} > \sqrt{m^2} = |m| \geqslant m$ donc $X_1 < 0$. Mais, par ailleurs, $\mathrm{e}^{\alpha_m} > 0$ donc on conclut que $\mathrm{e}^{\alpha_m} = X_2 = m + \sqrt{m^2+1}$.

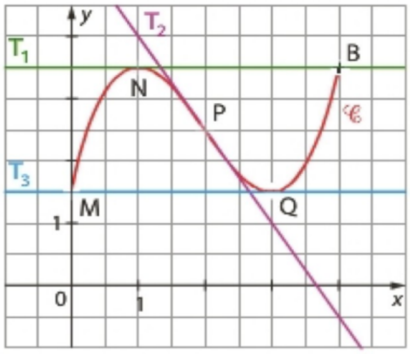
Partie D. Comme f et k sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $f \circ k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $(f \circ k)(x) = f(k(x)) = f(\alpha_x) = x$ donc, en dérivant, on obtient, pour tout réel x, $k'(x) \times f'(k(x)) = 1$. Or, on a vu dans la **Partie C** que, pour tout réel x,

$$f'(k(x)) = f'(\alpha_x) = \sqrt{x^2+1}$$

donc, pour tout réel x, $k'(x) \times \sqrt{x^2+1} = 1$ i.e. $k'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice N°3 :

f est une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0;4]$ dont on donne la représentation graphique $\mathcal{C}$ ci-contre.
Les tangentes T_1 et T_3 sont parallèles à l'axe des abscisses respectivement aux points N et Q.
T_2 est la tangente à $\mathcal{C}$ au point $P\left(2;\frac{5}{2}\right)$ et le point P est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



1. Déterminer $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$ graphiquement en justifiant la réponse donnée.
2. Déterminer une équation de la tangente T_2
3. Déterminer $f''(2)$ (justifier la réponse)
4. Rappeler la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   et déterminer la convexité de f
5. En déduire les variations de f' et le signe de $f''(x)$

1) T_1 est la tangente en 1 à C_f. Comme elle est horizontale, $f'(1) = 0$ (coef dir nul)

On lit le coef directeur de la tangente T_2 : $f'(2) = -1{,}5$

T_3 est la tangente en 3 à C_f. Comme elle est horizontale, $f'(3) = 0$ (coef dir nul)

2) $y = f'(2)(x-2)+f(2)$ $\quad y = -1{,}5(x-2)+2{,}5$ $\quad y = -1{,}5x+5{,}5$

3) La courbe C_f admet un point d'inflexion en x = 2 car la tangente T_2 traverse la courbe

donc $f''(2) = 0$

4) Une fonction est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes sur I

f est convexe sur [2;4] et concave sur [0;2]

5) f convexe ssi f' croissante ssi f'' positive

f concave ssi f' décroissante ssi f'' négative

Exercice N°4 :

Soit f(x) = $x+1+xe^{-x}$

1) Démontrer que $f'(x) = 1+(1-x)e^{-x}$ puis que $f''(x) = (-2+x)e^{-x}$

Facile

2) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$

y = 2x+1

3) Déduire des questions précédentes, sans calcul, que pour tout x ≤ 2 , f(x) ≤ 2x+1

pour tout x ≤ 2 , $-2+x$ est négatif donc f'' est négative d'où f est concave et donc C_f en dessous de ses tangentes pour x ≤ 2 en particulier, C_f est en dessous de sa tangente en 0

ce qui signifie que pour tout x ≤ 2 , f(x) ≤ 2x+1

Exercice N°5 :

1)a) $f(x)=(3-x)e^x+1$ donc $f'(x)=-e^x+(3-x)e^x = (2-x)e^x$

$f''(x)=-e^x+(2-x)e^x = (1-x)e^x$

b) Il faut étudier le signe de f'

Comme e^x est positif pour tout x, f'(x) est du signe de $2-x$ donc :

pour tout x ∈]–∞;2], f'(x)≥0 et f est croissante pour tout x ∈ [2;+∞[, f'(x) est négatif et f est décroissante

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		↗	e^2+1	↘	

c) Il faut étudier le signe de f''. Le signe de f'' est celui de 1-x donc

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$signe\,de\,f''$		+	0	–	

pour tout x ∈]–∞;1], f'' est positive donc f est convexe

pour tout x ∈ [1;+∞[, f'' est négative donc f est concave

La dérivée s'annule en changeant de signe en 1 donc la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 1

2) a) $g'(x)=-3x^2+6x \ = \ x(-3x+6)$

g'(x) est donc un polynôme du second degré de racines 0 et 2 donc il est du signe de a sauf entre ses racines :

x	$-\infty$		0		2		4
$g'(x)$		–	0	+	0	–	
$g(x)$		↘	-1	↗	3	↘	-17

g(0)=-1 et g(2)=3 et g(4)=-17

b) L'équation de la tangente est : $y=g'(1)(x-1)+g(1)$ avec g(1)=1 et g'(1)=3 donc

$$y=3(x-1)+1$$

$$y=3x-2$$

c) $g''(x)=-6x+6$

Pour tout x ∈]–∞;1], g''(x) est positive donc g est convexe

Pour tout x ∈ [1;4], g''(x) est négative donc g est concave

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 1 donc la courbe admet un point d'inflexion en x = 1

d) En x = 1 , la courbe admet un point d'inflexion donc la tangente traverse la courbe en x = 1 et comme g passe de convexe à concave, on a donc la courbe au dessus de la tangente sur]–∞;1[et en dessous sur [1;4] c'est à dire h positive sur]–∞;1[et négative sur [1;4]