Exercice N°1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = (3-x)e^x + 1$.

1. Calculer les fonctions dérivée f' et dérivée seconde f'' de f.
   On montrera que $f'(x) = (2-x)e^x$ et que $f''(x) = (1-x)e^x$.
2. Étudier les variations de f.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[3;4]$.
4. a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de T et de l'axe des abscisses.
   c) Étudier la convexité de f.
   d) Déduire de ce qui précède que $3 < \alpha < 3 + \dfrac{1}{e^3} < 3,05$.

Exercice N°2 :

Partie A. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = -g$ et $g(0) = 1$. On pose, pour tout réel x, $h(x) = g(-x)$.

1. Calculer $h(0)$.

2. Exprimer, pour tout réel x, $h'(x)$ en fonction de $h(x)$.

3. En déduire, pour tout réel x, l'expression de $h(x)$ puis de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$ et

$$(*) \text{ pour tout nombre réel } x,\ [f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de $(*)$, démontrer que, pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$.

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

c. En déduire les fonctions u et v.

d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Partie C. Dans cette partie, on considère la fonction f de la **Partie B** dont on a établi l'expression en question **B.3.d.**

1. Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion de sa courbe.

2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Soit m un nombre réel.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α_m dans $\mathbb{R}$.

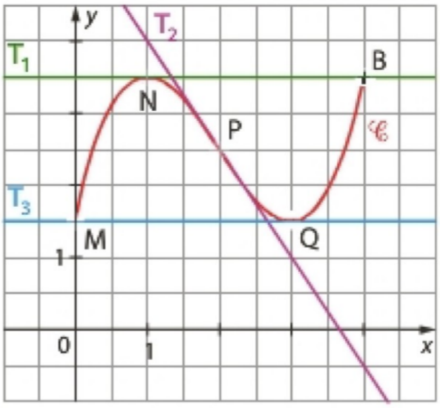
b. Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha_m} = m + \sqrt{m^2+1}$.

Partie D (facultatif). Les résultats de la partie précédente montrent qu'à tout réel x, on peut associer un unique réel α_x tel que $f(\alpha_x) = x$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ une fonction $k : x \mapsto \alpha_x$. On admet que cette fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$. En considérant la fonction $f \circ k$, montrer que, pour tout réel x,

$$k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice N°3 :

f est une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0;4]$ dont on donne la représentation graphique $\mathcal{C}$ ci-contre.
Les tangentes T_1 et T_3 sont parallèles à l'axe des abscisses respectivement aux points N et Q.
T_2 est la tangente à $\mathcal{C}$ au point $P\left(2;\frac{5}{2}\right)$ et le point P est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



1. Déterminer $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$ graphiquement en justifiant la réponse donnée.
2. Déterminer une équation de la tangente T_2
3. Déterminer $f''(2)$ (justifier la réponse)
4. Rappeler la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   et déterminer la convexité de f
5. En déduire les variations de f' et le signe de $f''(x)$

Exercice N°4 :

Soit f(x) = $x+1+x\,e^{-x}$

1) Démontrer que $f'(x) = 1+(1-x)e^{-x}$ puis que $f''(x) = (-2+x)e^{-x}$
2) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0
3) Déduire des questions précédentes , sans calcul , que pour tout x ≤ 2 , f(x) ≤ 2x+1

Exercice N°5 :

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = (3-x)e^x + 1$

   a) Calculer f'(x) et f''(x)

   b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation

   c) Etudier la convexité de la fonction f

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty;4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

   a) Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

   b) Déterminer une équation de la tangente en 1 à la courbe C_g

   c) Etudier la convexité de g et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe

   d) En déduire le signe de la fonction h définie sur $]-\infty;4]$ par h(x)=g(x)-(3x-2).

   On justifiera correctement la réponse .