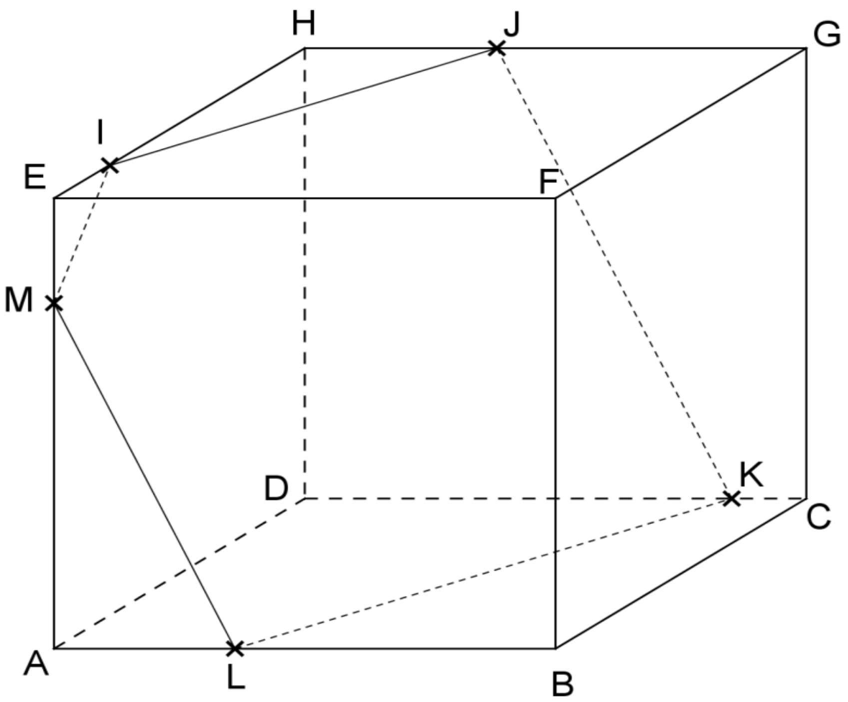
Terminale	Correction Série 1 : Vecteurs, droites et plans l'espace	OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Les droites (KL) et (IJ) sont parallèles ainsi que les droites (ML) et (JK).
la sectiion du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est le polygone IJKLM.



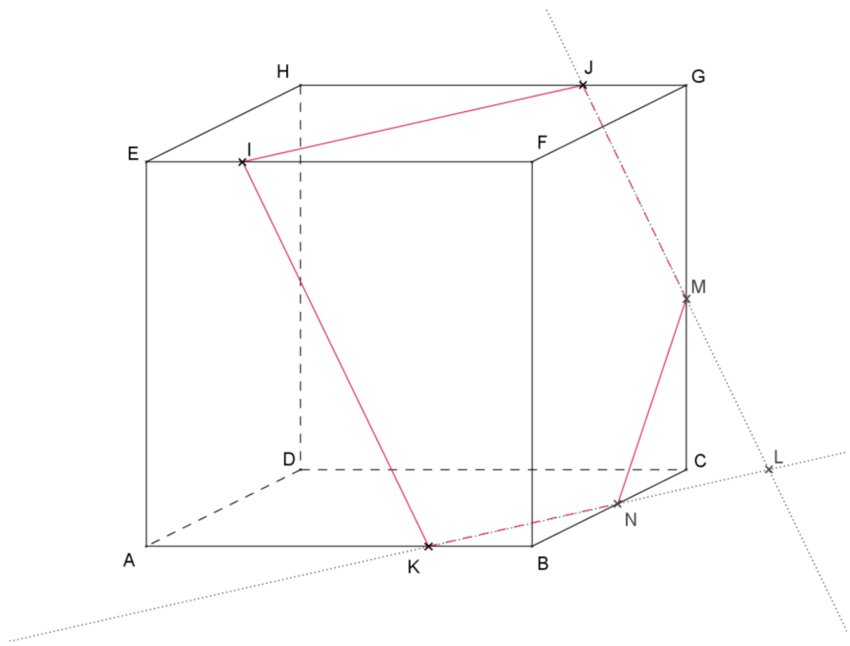
Exercice N°2 :

1. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{FB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GF}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{FB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GF}+\frac{1}{4}\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GE}$.

2. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{FB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{FB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{FB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{FB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GA}$.

   Comme les vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{GA}$ ne sont pas colinéaire, on en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont coplanaires.

Exercice N°3 :



Exercice N°4 :

1. a. Dans le triangle FIB rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a $FI^2 = FB^2 + BI^2$.

FB = 1 et $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $BI = \frac{2}{3}$. $FI^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$. Donc $FI = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Dans le triangle FEJ rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore, on a $FJ^2 = FE^2 + EJ^2$.

FE = 1 et $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ donc $EJ = \frac{2}{3}$. $FJ^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$. Donc $FJ = \frac{\sqrt{13}}{3}$ et FIJ est isocèle en F.

b. Comme K est le milieu de [IJ], la droite (FK) est la médiane issue de F du triangle FIJ isocèle en F ainsi (FK) est aussi la médiatrice de [IJ] donc (FK) et (IJ) sont orthogonales.

c. Dans le triangle GIC rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a $GI^2 = GC^2 + CI^2$.

GC = 1 et $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $CI = \frac{1}{3}$. $GI^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Donc $GI = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Dans le triangle GHJ rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a $GJ^2 = GH^2 + HJ^2$.

GH = 1 et $\overrightarrow{JH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ donc $HJ = \frac{1}{3}$. $FJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$. Donc $GJ = \frac{\sqrt{10}}{3}$ et GIJ est isocèle en G.

K est le milieu de [IJ], la droite (GK) est la médiane issue de G du triangle GIJ isocèle en G ainsi (GK) est aussi la médiatrice de [IJ] donc (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2. Les droites (FK) et (GK) sont sécantes et orthogonales à la même droite (IJ).
Donc la droite (IJ) et le plan (FGK) sont perpendiculaires.

3. $(IJ) \perp (FGK)$ donc la droite(IJ) est orthogonale à toute droite du plan donc $(IJ) \perp (FG)$.
P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) d'où $(PG) \perp (FIJ)$ donc $(PG) \perp (IJ)$.

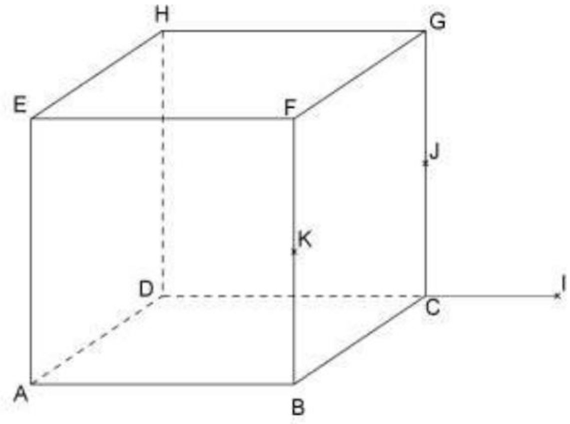
Les droites (FG) et (PG) sont sécantes et orthogonales à la même droite (IJ).
Donc la droite (IJ) et le plan (FGP) sont perpendiculaires.

4. a. Les plans (FGP) et (FGK) sont perpendiculaires à une même droite (IJ) donc les deux plans sont parallèles. De plus F appartient aux deux plans donc (FGK) et (FGP) sont confondus et donc les points sont F, G, K et P coplanaires.

b. Les points F et K appartiennent aux deux plans (FGK) et (FIJ) donc ces deux plans sont sécants suivant la droite (FK).

De plus, P appartient aussi aux plans (FGK) et (FIJ) d'où P appartient à (FK) donc les points F, P et K sont alignés.

Exercice N°5 :



1. Construction ci-contre
2. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires donc les droites (IJ) et (BE) sont parallèles.
3. $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont égaux donc les droites (JK) et (BC) sont parallèles.
4. Les droites sécantes (IJ) et (JK) du plan (IJK) sont parallèles aux droites sécantes (BE) et (BC) du plan (BCE) donc les plans (IJK) et (BCE) sont parallèles.