Exercice N°1 :

Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, $A(-2,3,1)$ et $B(5,2,-2)$

1. Calculer une représentation paramétrique de (AB) passant par $A(-2,3,1)$.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-1\\-3\end{pmatrix}$, et $A(-2,3,1) \in (AB)$ donc une représentation paramétrique de (AB) est

$$(AB) \;:\; \begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

2. Calculer une autre représentation paramétrique de (AB) passant par $B(5,2,-2)$.
De même, en considérant qu'elle passe par le point $B(5,2,-2)$ on obtient :

$$(AB) \;:\; \begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 2 - t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

3. Les points $M(-9,4,4)$ et $N(12,1,1)$ appartiennent-ils à cette droite ?

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x_M = 7t - 2 \\ y_M = -t + 3 \\ z_M = -3t + 1 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} -9 = 7t - 2 \\ 4 = -t + 3 \\ 4 = -3t + 1 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = -1 \\ 1 = -t \\ 3 = -3t \end{cases} \end{aligned}$$

$t = -1$ convient donc $M \in (AB)$.

$$\begin{aligned} N \in (AB) &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 12 = 7t - 2 \\ 1 = -t + 3 \\ 1 = -3t + 1 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = 2 \\ -2 = -t \\ t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Un tel réel t n'existe pas donc $N \notin (AB)$.

Exercice N°2 :

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = 0 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = 9 + 15t' \\ y = -5 - 3t' \\ z = -8 - 12t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}, \text{ sont confondues.}$$

- Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$
- Ces vecteurs sont colinéaires car $\overrightarrow{u'} = 3\overrightarrow{u}$ donc $\mathscr{D} // \mathscr{D}'$..
- On va montrer qu'elles ont un point commun (et donc qu'elles sont confondues).

  Le point $A(-1; -3; 0) \in \mathscr{D}$, vérifions si $A \in \mathscr{D}'$:

$$\begin{cases} -1 = 9 + 15t' \\ -3 = -5 - 3t' \\ 0 = -8 - 12t' \end{cases} \iff \begin{cases} -10 = 15t' \\ 2 = -3t' \\ 8 = -12t' \end{cases}$$

  Pour $t' = -\frac{2}{3}$, le système est vérifié donc $A \in \mathscr{D}'$.

  Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles et ont un point commun A, elles sont donc confondues.

Exercice N°3 :

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques sont parallèles non confondues.

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4t \\ z = 1 + 12t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = 5 + 3t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}, \text{ sont strictement parallèles.}$$

- Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Ces vecteurs sont colinéaires car $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{u'}$ donc $\mathscr{D} // \mathscr{D}'$.
- On va montrer qu'elles ne sont pas confondues.

  Le point $A(-3; 0; 1) \in \mathscr{D}$, vérifions s'il appartient à $\mathscr{D}'$:

$$\begin{cases} -3 = -1 + t' \\ 0 = 2 + t' \\ 1 = 5 + 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = t' \\ -2 = t' \\ -4 = 3t' \end{cases}$$

  Ce système n'a pas de solution, on en déduit que $A \notin \mathscr{D}'$ et par suite que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles .

Exercice N°4 :

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}: \begin{cases} x = -3+t \\ y = t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}': \begin{cases} x = -1+t' \\ y = 2-2t' \quad t' \in \mathbb{R}, \\ z = 5+3t' \end{cases} \text{sont non coplanaires.}$$

Méthode : pour montrer que deux droites sont non coplanaires, il faut montrer qu'elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

• $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

• On cherche s'il existe un réel t et un réel t' permettant d'obtenir les coordonnées d'un même point.
On résout le système :

$$\begin{cases} -3+t = -1+t' \\ t = 2-2t' \\ 1+3t = 5+3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t-t' = 2 \\ t+2t' = 2 \\ 3t-3t' = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t = 6 \\ 3t' = 0 \\ 3t-3t' = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \\ 6 = 4 \text{ impossible} \end{cases} \quad \text{donc } \mathscr{D} \text{ et } \mathscr{D}' \text{ ne sont pas sécantes.}$$

• Conclusion : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Exercice N°5 :

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}: \begin{cases} x = -3+t \\ y = 2-t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}': \begin{cases} x = t' \\ y = 1+t' \qquad t' \in \mathbb{R}, \\ z = -1-4t' \end{cases} \text{sont sécantes.}$$

$$\begin{cases} -3+t = t' \\ 2-t = 1+t' \\ 1+t = -1-4t' \end{cases} \iff \begin{cases} t-t' = 3 \\ t+t' = 1 \\ t+'t' = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 4 \\ 2t' = -2 \\ t+4t' = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ t' = 1 \\ 2-4 = -2 \text{ vrai..} \end{cases}$$

Le système a un couple solution $(t;t') = (2;-1)$
Donc, en remplaçant t par 2 dans l'équation de $\mathscr{D}$, on obtient :

$$\begin{cases} x = -3+2 = -1 \\ y = 2-2 = 0 \\ z = 1+2 = 3 \end{cases}$$

On peut vérifier qu'on trouve les mêmes valeurs en remplaçant t' par (-1) dans l'équation de $\mathscr{D}'$,

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1+(-1) = 0 \\ z = -1+4 = 3 \end{cases}$$

Conclusion : $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \{A\}$ avec $A(-1;0;3)$.

Exercice N°6 :

1) a) On a les points D(0 ; 1 ; 0) et $J\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{DJ}\left(1\ ;-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$

De plus $\overrightarrow{BG}(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$

De façon immédiate les points B, G, I définissent un plan

$$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0 \text{ et } \overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} = 0$$

Donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$ donc $\overrightarrow{DJ}$ est normal à (BGI).

b) Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in$ (BGI), on a :

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DJ} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z = 0 \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x-y+z-2 = 0$$

Une équation du plan (BGI) est : $2x-y+z-2=0$.

2) a) d a pour vecteur directeur $2\overrightarrow{DJ}$, comme d passe par F :

une représentation paramétrique de d : $\begin{cases}x = 1+2t\\ y = -t\\ z = 1+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

b) Soit $L = d\cap$ BGI. en remplaçant les coordonnées paramétriques de d dans l'équation du plan (BGI), on obtient :

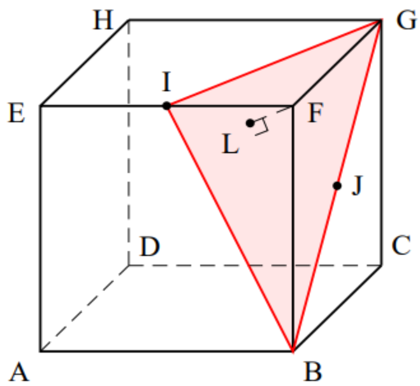
$$2(1+2t)-(-t)+(1+t)-2 = 0 \Leftrightarrow 6t+1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$$

On obtient alors les coordonnées de $L\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{5}{6}\right)$

3) a) $V_{FBGI} = \frac{1}{3}\times\frac{FI\times FB}{2}\times FG = \frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2}\times 1 = \frac{1}{12}$.

b) $V_{FBGI} = \frac{1}{3}\times\mathscr{A}(BGI)\times LF$

$$\mathscr{A}(BGI) = \frac{3V_{FBGI}}{LF} = \frac{\frac{3}{12}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}} = \frac{1}{4}\times\frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$



Exercice N°7 :

1) Position relative de (P) et de d

a) $\overrightarrow{AB}(3\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\ ;-1\ ;-6)$.

Les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, donc les point A, B , C déterminer un plan. De plus :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=3-4+1=0 \text{ et } \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=2+4-6=0$$

Donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{n}$ est normal à (P).

b) Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(P)$, on a :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)-4(y-1)+(z-4)=0 \Leftrightarrow x-4y+z-1=0$$

c) $\vec{u}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=1-4+3=0$. Donc $\vec{u}\perp\vec{n}$.

Un vecteur directeur $\vec{u}$ de d est orthogonal à $\vec{n}$, vecteur normal à (P), donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur du plan (P). La droite d est parallèle à (P).

2) Position relative de (P) et de (S)

a) La droite Δ est orthogonale au plan (P) donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ.

Montrons que $H\in(P)$ et que $\overrightarrow{IH}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

$x_H-4y_H+z_H-1=3-4+2-1=0$ donc $H\in(P)$.

$\overrightarrow{IH}(2\ ;-8\ ;\ 2)=2\vec{n}$ donc $\overrightarrow{IH}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

La droite Δ coupe (P) en H.

b) $IH=\sqrt{2^2+(-8)^2+2^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

c) Pour tout point M du plan (P) on a $IM\geqslant 6\sqrt{2}>6$.

La distance de (P) au point I est supérieur à 6, donc le plan (P) ne coupe pas la sphère S de centre I est de rayon 6.

3) Position relative de d et de (S).

a) Une représentation paramétrique de la droite d : $\begin{cases}x=1+t\\y=4+t\\z=2+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

b) $M\in S \Leftrightarrow IM^2=6^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-9)^2+z^2=36$.

c) On remplace les coordonnées paramètrique d'un point de d dans l'équation de la sphère :

$$(1+t-1)^2+(4+t-9)^2+(2+3t)^2=36 \Leftrightarrow$$
$$t^2+(t-5)^2+(2+3t)^2=36 \Leftrightarrow t^2+t^2-10t+25+4+12t+9t^2=36$$
$$11t^2+2t-7=0 \text{ (E)} \quad \Delta=4+308=312>0$$

L'équation (E) admet deux solutions donc la droite d coupe la sphère (S) en deux points distincts.