Exercice N°1 :

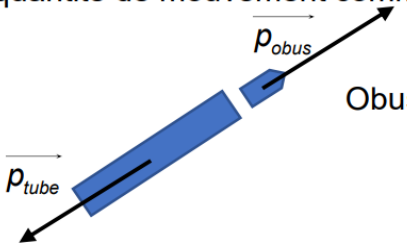
Correction

1. Expulsion de l'obus

1.1. Comme on néglige les frottements et que le système {tube du canon + obus} est pseudo-isolé, on peut considérer la quantité de mouvement comme constante pendant cette phase de tir.

1.2.

Tube :
v_{recul} = ?
m_T = 100×10³ kg



Obus : v_o = 1600 m.s⁻¹
m_o = 105 kg

$\overrightarrow{p_{\{tube+obus\}}} = \overrightarrow{p_{tube}} + \overrightarrow{p_{obus}} = \overrightarrow{Cte}$ Avant le tir, le tube et l'obus sont immobiles donc $\overrightarrow{Cte} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{p_{tube}} + \overrightarrow{p_{obus}} = \vec{0}$

$\overrightarrow{p_{tube}} = -\overrightarrow{p_{obus}}$ Ces deux vecteurs sont opposés et possèdent la même norme.

$p_{tube} = p_{obus}$

On sait que la quantité de mouvement s'exprime selon la relation suivante : $p = m.v$

$m_T.v_{recul} = m_o.v_o$

$$v_{recul} = \frac{m_o.v_o}{m_T}$$

$$v_{recul} = \frac{105 \times 1600}{100 \times 10^3} = 1{,}68 \text{ m.s}^{-1}$$

1.3. Avec un tube 10 fois plus léger : $m_T = 10 \times 10^3$ kg

$$v_{recul} = \frac{105 \times 1600}{10 \times 10^3} = 16{,}8 \text{ m.s}^{-1}$$

L'intérêt de la masse importante du canon est donc d'éviter d'avoir une vitesse de recul trop importante qui pourrait abimer le canon ou le pas de tir.

2. Trajectoire de l'obus

2.1. Déterminons les composants du vecteur accélération de l'obus en appliquant la deuxième loi de Newton :

- Système : Obus (point M)
- Référentiel : terrestre, supposé galiléen
- Bilan des forces : Poids $\vec{P}$
- Deuxième loi de Newton : $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ or $m = cte$ donc $\vec{P} = m.\vec{a}$

$$m.\vec{g} = m.\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$

- Accès aux coordonnées du vecteur accélération :

Dans le repère xOy donné : $\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

2.2. Accès aux coordonnées du vecteur vitesse :

Comme $\vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$ alors les coordonnées du vecteur vitesse sont des primitives du vecteur accélération.

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g.t + C_2 \end{cases}$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 dépendent des conditions initiales :

À $t = 0$, $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0}$ avec $\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0.\cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0.\sin(\alpha) \end{cases}$

Donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs $\vec{v}(t=0)$ et $\vec{v_0}$,

Il vient : $C_1 = v_0.\cos(\alpha)$

$C_2 = v_0.\sin(\alpha)$

Finalement : $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0.\cos(\alpha) \\ v_y(t) = -g.t + v_0.\sin(\alpha) \end{cases}$

- <u>Accès aux coordonnées du vecteur position : (équations horaires du mouvement)</u>

Comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ alors les coordonnées du vecteur vitesse sont des primitives du vecteur vitesse.

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = v_0.\cos(\alpha).t + C4 \\ y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin(\alpha).t + C5 \end{cases}$$

Les constantes d'intégration C_4 et C_5 dépendent des conditions initiales.

À $t = 0$, $\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0}$ en effet les points O et M sont alors confondus.

Donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{OM}(t=0)$ et $\vec{0}$,

Il vient : $C_4 = 0$

$C_5 = 0$

Finalement : $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = v_0.\cos(\alpha).t \\ y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin(\alpha).t \end{cases}$

2.3. <u>Détermination de l'équation de la trajectoire y = f(x) :</u>

$$\begin{cases} x(t) = v_0.\cos(\alpha).t \\ y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin(\alpha).t \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{v_0.\cos(\alpha)}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \times \left(\frac{x}{\cos\alpha \times v_0}\right)^2 + (\sin\alpha \times v_0) \times \frac{x}{\cos\alpha \times v_0}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \times \left(\frac{x}{\cos\alpha \times v_0}\right)^2 + \frac{\sin\alpha \times x}{\cos\alpha}$$

Or $\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Donc $$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}g.\left(\frac{x}{\cos\alpha \times v_0}\right)^2 + \tan(\alpha).x}$$

3. Vérification des données du document

3.1.

- <u>Déterminons la durée de vol de l'obus :</u>

Au sol la composante verticale y est nulle :

$$y(t) = 0 \leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2}g \times t^2 + (\sin\alpha \times v_0) \times t \leftrightarrow t(-\frac{1}{2}g \times t + \sin\alpha \times v_0) = 0$$
$$\leftrightarrow -\frac{1}{2}g \times t + \sin\alpha \times v_0 = 0$$
$$\leftrightarrow t = \frac{2 \times \sin\alpha \times v_0}{g}$$
$$t = \frac{2 \times \sin(50) \times 1600}{9{,}8} = 250 \text{ s}$$

- <u>Déterminons la portée théorique du canon :</u>

Pour t = 250s : $x(t) = (\cos\alpha \times v_0) \times t$
$$x(t) = \cos(50) \times 1600 \times \frac{2 \times \sin(50) \times 1600}{9{,}8} = 257 \text{ km}$$

3.2. A l'altitude maximale $V_y = 0 \text{ m.s}^{-1}$, déterminons donc t_{max}
Comme $V_y = -9{,}8 \times t_{max} + 1226$
Donc $t_{max} = -\frac{V_y - 1226}{9{,}8}$
$= -\frac{0-1226}{9{,}8}$
$= \frac{1226}{9{,}8}$
$t_{max} = 125 \text{ s}$
Donc l'altitude maximale est de
$$y_{max} = -\frac{1}{2} \times g \times t_{max}^2 + V_0 \times \sin(\alpha) \times t_{max}$$
$$= -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 125^2 + 1600 \times \sin 50 \times 125$$
$$= -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 125^2 + 1600 \times \sin 50 \times 125$$
$$\approx 7{,}7 \times 10^4 \text{ m}$$
Soit environ 77 km.

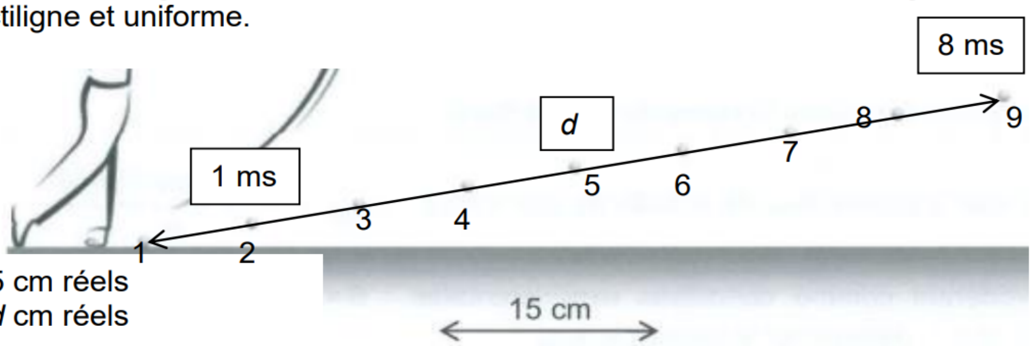
3.3.	Résultats théoriques	Résultats expérimentaux :
Durée de vol :	250 s	176 s
Portée :	257 km	126 km
Altitude maximale :	77 km	42 km

L'écart existant entre les résultats théoriques obtenus est explicable par les **frottements de l'air** qui n'ont pas été pris en compte dans notre étude.
Ainsi l'obus va moins loin, moins haut et vole moins longtemps en présence d'air.

Exercice N°2 :

1. Vitesse initiale de la balle
1.1. La caméra enregistre 1000 images par seconde. La durée qui sépare deux positions consécutives sur la chronophotographie vaut donc $\Delta t = 1/1000 \text{ s} = 10^{-3}$ s.
1.2. La figure 1 montre que pendant une même durée, la distance entre deux positions consécutives est constante. Ainsi la vitesse est constante et le mouvement est uniforme.
Les positions successives sont alignées suivant une droite, alors le mouvement est rectiligne.
Le mouvement est rectiligne et uniforme.

1.3. $v = \frac{d}{\Delta t}$



3,0 cm schéma ↔ 15 cm réels
12,0 cm schéma ↔ *d* cm réels
$d = \frac{12{,}0 \times 1{,}5}{3{,}0} = 60 \text{ cm}$
Il s'écoule 8 ms entre les positions 1 et 9
$v_0 = \frac{60 \times 10^{-2}}{8 \times 10^{-3}} = 75 \text{ m.s}^{-1}$

Remarque sur 1.1. En réalité, il s'écoule 1/999 s entre deux images.
Du coup pour 1.2. on trouverait v = 0,60/(8×1/999) = 74 ,9 m/s. Arrondi à 2 CS = 75 m/s

2. Mouvement de la balle modélisée par un point matériel

2.1. On applique la seconde loi de Newton, au système {balle} de masse m constante, dans le référentiel du sol supposé galiléen.

$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a}$

Seule la force poids $\vec{P}$ est prise en considération.

$\vec{P} = m.\vec{a}$

$m.\vec{g} = m.\vec{a}$

$\vec{g} = \vec{a}$

En utilisant le repère indiqué, on vérifie que $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$.

2.2. Par définition $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, on obtient les coordonnées de $\vec{v}$ en primitivant celle de $\vec{a}$:

$\vec{V}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g.t + C_2 \end{cases}$ or $\vec{V_0}\begin{cases} V_{0x} = V_0.\cos(\theta) = C_1 \\ V_{oy} = V_0.\sin(\theta) = C_2 \end{cases}$ donc $\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0.\cos(\theta) \\ v_y = -g.t + v_0.\sin(\theta) \end{cases}$

On nomme M le point modélisant la balle de golf.

Par définition $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, on obtient les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ en primitivant celle de $\vec{v}$:

$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = V_0.\cos(\theta).t + C_3 \\ y = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin(\theta).t + C_4 \end{cases}$ or $\overrightarrow{OM}(t=0)\begin{cases} x(0) = 0 = C_3 \\ y(0) = 0 = C_4 \end{cases}$

donc $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = V_0.\cos(\theta).t \\ y = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin(\theta).t \end{cases}$.

2.3. Déterminons l'expression de la trajectoire du point M.

$x = V_0.\cos(\theta).t$

donc $t = \dfrac{x}{V_0.\cos(\theta)}$.

On reporte cette expression du temps dans l'expression de l'ordonnée $y = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin(\theta).t$

$$y(x) = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{V_0.\cos(\theta)}\right)^2 + V_0.\sin(\theta).\frac{x}{V_0.\cos(\theta)}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{V_0^2.\cos^2(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.x$$

$$y(x) = x.\left(-\frac{1}{2}.g.\frac{x}{V_0^2.\cos^2(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$$

Lorsque l'abscisse de la balle atteint la portée x_{max} alors $y = 0$.

Cela est vérifié si $x = 0$ solution non retenue et si $\left(-\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x}{V_0^2.\cos^2(\theta)} + \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = 0$

$$\frac{1}{2}.g.\frac{x}{V_0^2.\cos^2(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

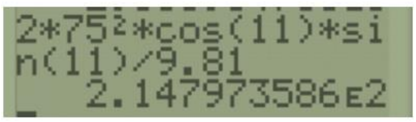
On multiplie par $2.V_0^2.\cos^2(\theta)$.

$$g.x = 2.\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.V_0^2.\cos^2(\theta)$$

$$x = 2.\frac{\sin(\theta)}{g}.V_0^2.\cos(\theta) = x_{max} = 2.\frac{V_0^2.\cos(\theta)\sin(\theta)}{g}$$

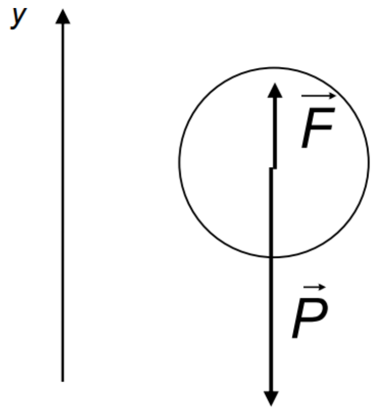
La formule de la portée est vérifiée.

2.4. $x_{max} = 2 \times \dfrac{75{,}0^2 \times \cos(11{,}0) \times \sin(11{,}0)}{9{,}81} = 2{,}15 \times 10^2$ m



2.5. L'introduction annonce une portée de 250 mètres, cette valeur est supérieure à celle calculée à la question précédente.
Cela semble surprenant car il serait plus habituel de trouver une valeur théorique de la portée supérieure à celle annoncée. La différence s'expliquant par le fait que nous avons négligé les frottements au cours de cette étude. La partie 3 va apporter une explication logique.

3. De l'importance de l'air dans le vol d'une balle de golf
3.1. Voir ci-contre.



3.2. La deuxième loi de Newton donne maintenant $\vec{P}+\vec{F}=m.\vec{a}$
Par projection suivant l'axe vertical :
$P_y + F_y = m.a_y$
$-P + F = m.a_y$
$$a_y = \frac{-P+F}{m} = \frac{-m.g+F}{m} = -g + \frac{F}{m}$$

3.3. En 2.3. avec $a_y = -g$ on a obtenu une portée $x_{max} = 2.\frac{V_0^2.\cos(\theta)\sin(\theta)}{\boxed{g}}$.

Avec l'effet Magnus, on a $a_y = -g + \frac{F}{m}$, par analogie on en déduit une portée
$$x_{max} = 2.\frac{V_0^2.\cos(\theta)\sin(\theta)}{\boxed{\left(g-\frac{F}{m}\right)}}.$$

Exprimons F.

$$\left(g-\frac{F}{m}\right) = 2.\frac{V_0^2.\cos(\theta)\sin(\theta)}{x_{max}}$$
$$\left(-g+\frac{F}{m}\right) = -2.\frac{V_0^2.\cos(\theta)\sin(\theta)}{x_{max}}$$
$$\frac{F}{m} = g - 2.\frac{V_0^2.\cos(\theta)\sin(\theta)}{x_{max}}$$
$$F = m.g - 2.\frac{m.V_0^2.\cos(\theta)\sin(\theta)}{x_{max}}$$

On remplace θ par 11° qui est conforme à une dizaine de degrés et on conserve les valeurs de g et v_0.
$$F = 46\times10^{-3}\times9{,}81 - 2\times\frac{46\times10^{-3}\times75^2\times\cos(11)\sin(11)}{250}$$
$F = 6{,}3\times10^{-2}$ N

On a calculé F or le sujet demande de l'estimer ce qui sous-entend qu'il existe une méthode plus rapide et plus simple.

Autre version :
On a trouvé 215 m sans tenir compte de cette force F donc avec une somme des forces de valeur égale à g.
Or la balle retombe à 250 m.
La différence représente un écart relatif de (250 – 215) / 250 = 14%
On pourrait donc considérer que la force réellement ressentie par la balle est son poids « diminué » de 14%
Ce qui amène à écrire $F = 0{,}14*m.g = 0{,}14\times9{,}81\times0{,}046 = 6{,}3\times10^{-2}$ N

Version complète pour établir la nouvelle expression de la portée : (sans doute non nécessaire)

Avec $a_y = -g + \frac{F}{m}$, on en déduit $v_y = \left(-g + \frac{F}{m}\right).t + v_0.\sin(\theta)$

et $y = \frac{1}{2}.\left(-g + \frac{F}{m}\right).t^2 + v_0.\sin(\theta).t$

Suivant l'axe des abscisses la résultante des forces ne change pas par rapport à la situation précédente, on a toujours $x = V_0.\cos(\theta).t$

donc $t = \frac{x}{V_0.\cos(\theta)}$.

On reporte cette expression du temps dans l'expression de l'ordonnée

$$y = \frac{1}{2}.\left(-g + \frac{F}{m}\right).t^2 + v_0.\sin(\theta).t$$

$$y(x) = \frac{1}{2}.\left(-g + \frac{F}{m}\right).\left(\frac{x}{V_0.\cos(\theta)}\right)^2 + v_0.\sin(\theta).\frac{x}{V_0.\cos(\theta)}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(-g + \frac{F}{m}\right).\frac{x^2}{V_0^2.\cos^2(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.x$$

$$y(x) = x.\left(\frac{1}{2}\left(-g + \frac{F}{m}\right).\frac{x}{V_0^2.\cos^2(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$$

Lorsque l'abscisse de la balle atteint la portée x_{max} alors $y = 0$.

Cela est vérifié si $x = 0$ solution non retenue et si $\left(\frac{1}{2}\left(-g + \frac{F}{m}\right).\frac{x}{V_0^2.\cos^2(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = 0$

$$\frac{1}{2}\left(-g + \frac{F}{m}\right).\frac{x}{V_0^2.\cos^2(\theta)} = -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

On multiplie par $2.V_0^2.\cos^2(\theta)$.

$$\left(-g + \frac{F}{m}\right).x = -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.2.V_0^2.\cos^2(\theta)$$

$$x = -2.\frac{\sin(\theta)}{\left(-g + \frac{F}{m}\right)}.V_0^2.\cos(\theta)$$

$$x = 2.\frac{\sin(\theta)}{\left(g - \frac{F}{m}\right)}.V_0^2.\cos(\theta)$$

$$x_{\max} = 2.\frac{V_0^2.\cos(\theta)\sin(\theta)}{\left(g - \frac{F}{m}\right)}$$ nouvelle expression de la portée avec l'effet Magnus

Exercice N°3 :

1. Trajectoire de la flèche :

1.1. La résistance de l'air ayant relativement peu d'effet, on peut négliger la force de frottement de l'air face aux autres forces subies par la flèche.

1.2. Système : flèche de masse m Référentiel : terrestre supposé galiléen

D'après la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m.\vec{a}$

$$m.\vec{g} = m.\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

1.3.1. D'après (1) $x(t) = (v_0.\cos\alpha).t$ donc $t = \frac{x(t)}{v_0.\cos\alpha}$

On remplace t par cette expression dans (2) :

$$z(x) = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x(t)}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + (v_0\sin\alpha).\frac{x(t)}{v_0.\cos\alpha}$$

Rafmaths.com

$$z(x) = -\frac{1}{2}.g.\frac{x(t)^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + x(t).\tan\alpha$$

1.3.2. L'expression de la trajectoire est du type $z(x) = ax^2 + bx$, la courbe représentative de cette fonction est une parabole comme l'indique le premier texte.

2. « Chute » de la flèche :

2.1. Durée du trajet de la flèche :

2.1.1. $x(t_C) = x_C = (v_0.\cos\alpha).t_C$

$t_C = \dfrac{x_C}{v_0.\cos\alpha}$

2.1.2. Avec une vitesse initiale v_0 de 70 m/s, le vol dure une seconde (t_C = 1 s) et l'angle α vaut 4°, enfin la chute h est d'environ 5 mètres. L e premier texte nous apprend que x_C = 70 m.

Vérifions la cohérence de ces valeurs numériques, en calculant t_C :

$t_C = \dfrac{70}{70.\cos 4}$ = 1,0 s durée conforme à celle indiquée.

2.2. *« Distance de chute » :*

2.2.1. Garder les mêmes conditions initiales signifie que l'on ne modifie pas la vitesse initiale v_0, ni l'angle α.

Pour que la flèche atteigne le point A, il faudrait qu'elle se déplace en ligne droite suivant la droite (OA). Pour cela, on doit faire l'hypothèse que l'attraction gravitationnelle n'est pas assez forte pour courber la trajectoire.

La flèche ne subirait aucune force, elle constituerait un système mécaniquement isolé. Le mouvement serait rectiligne et uniforme ($\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} = m.\vec{a}$ alors $\vec{a} = \vec{0}$).

2.2.2. Méthode 1 : Dans le triangle OAC rectangle en C, tan α = $\dfrac{AC}{OC} = \dfrac{h}{x_C}$.

De plus on a établi en 2.1.1. que $x_C = (v_0.\cos\alpha).t_C$, alors tan α = $\dfrac{h}{(v_0.\cos\alpha).t_C}$

$h = \tan\alpha.(v_0.\cos\alpha).t_C$

$h = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.(v_0.\cos\alpha).t_C$

$\mathbf{h = \sin\alpha .v_0.t_C}$

Méthode 2:

Entre O et A le mouvement est rectiligne et uniforme à la vitesse v_0 pendant la durée $t_{OA} = t_C$ donc : $OA = v_0.t_{OA} = v_0.t_C$.

Et $\sin\alpha = \dfrac{h}{OA}$ donc $OA = \dfrac{h}{\sin\alpha}$.

En égalant les deux expressions de OA : $v_0.t_C = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ finalement : $\boxed{\mathbf{h = \sin\alpha .v_0.t_C}}$

2.2.3. On a : $z(t_C) = 0 = -\dfrac{1}{2}.g.t_C^2 + v_0.\sin\alpha.t_C$ soit $0 = -\dfrac{1}{2}.g.t_C^2 + h$

$h = \dfrac{1}{2}gt_C^2$. Ainsi pour t = t_C la « distance de chute » h vaut « gt²/2 ».

3. Influence de la valeur de la vitesse initiale sur le tir

3.1. On garde α constant, donc si v_0 augmente alors, pour x_C fixé, la durée de chute $t_C = \dfrac{x_C}{v_0.\cos\alpha}$ diminue. La hauteur de chute $h = \dfrac{1}{2}gt_C^2$ diminue car t_C diminue.

3.2. Si la hauteur de chute h diminue, la flèche atteint la cible au-dessus du point C.

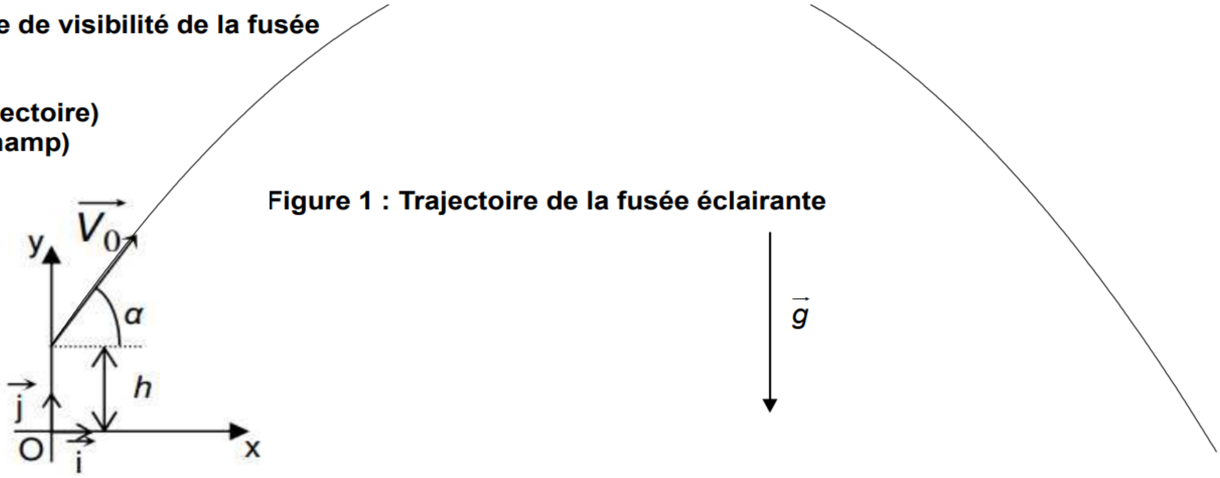
Exercice N°4 :

1. Durée de visibilité de la fusée

(0,5 trajectoire)
(0,25 champ)

1.1.

Figure 1 : Trajectoire de la fusée éclairante



1.2. (0,5) Dans le référentiel terrestre considéré galiléen, on peut appliquer la **deuxième loi de Newton** au système {fusée éclairante} pour déterminer les coordonnées du vecteur accélération.
En effet, cette loi stipule que dans un référentiel galiléen, **la somme des forces extérieures appliquées au système (ici la fusée éclairante) est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement**.

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_f.\vec{v})}{dt} = \frac{dm_f}{dt}.\vec{v} + m_f.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

On néglige la variation de masse de la fusée pendant son mouvement donc $\frac{dm_f}{dt} = 0$ et la deuxième loi de Newton devient : $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m_f.\frac{d\vec{v}}{dt} = m_f.\vec{a}$.

On néglige toutes les actions dues à l'air (frottement, poussée d'Archimède), alors la fusée est en chute libre, soumise uniquement à la force poids $\vec{P}$.

Ainsi $\vec{P} = m_f.\vec{a}$.

$m_f.\vec{g} = m_f.\vec{a}$

$\vec{g} = \vec{a}$

(0,5) Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on obtient $\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$

1.3. Comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, on a $\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}$

En primitivant, on obtient $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g.t + C_2 \end{cases}$ où C_1 et C_2 sont des constantes liées aux conditions initiales.

À la date t = 0 s, on $\vec{v} = \overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0.\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0.\sin\alpha \end{cases}$.

(1) On en déduit $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_y(t) = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases}$

Comme $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \end{cases}$, on a $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0.\cos\alpha \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases}$

En primitivant, on obtient $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\alpha.t + C_3 \\ y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + C_4 \end{cases}$ où C_3 et C_4 sont des constantes liées aux conditions initiales.

À la date t = 0 s, la fusée éclairante est située à la sortie du pistolet à une altitude h donc $\overrightarrow{OG}\begin{cases}0\\h\end{cases}$.

(1) On en déduit $\overrightarrow{OG}\begin{cases}x(t)=v_0.\cos\alpha.t\\ y(t)=-\frac{1}{2}.g.t^2+v_0.\sin\alpha.t+h\end{cases}$ conformément aux équations horaires proposées.

1.4. (1) Pour déterminer la valeur de la durée du vol de la fusée éclairante, on cherche la date t_{Vol} pour laquelle la fusée touche le sol, ainsi y(t_{vol}) = 0.

Il faut résoudre l'équation du second degré : $-\frac{1}{2}.g.t_{vol}{}^2+v_0.\sin\alpha.t_{vol}+h=0$ et ne retenir que la solution positive.

$$t_{vol} = \frac{-v_0.\sin\alpha-\sqrt{(v_0.\sin\alpha)^2-4\times\left(-\frac{g}{2}\right).h}}{-g} = \frac{-v_0.\sin\alpha-\sqrt{(v_0.\sin\alpha)^2+2.g.h}}{-g}$$

$$t_{vol} = \frac{-50\times\sin 55-\sqrt{(50\times\sin 55)^2+2\times 9{,}8\times 1{,}8}}{-9{,}8} = \mathbf{8{,}4\ s}$$

<u>Méthode moins rigoureuse :</u> résolution numérique

$$-\frac{1}{2}.g.t_{vol}{}^2+v_0.\sin\alpha.t_{vol}+h=0$$

$$-0{,}5\times 9{,}8.t_{vol}{}^2+50\times(\sin 55).t_{vol}+1{,}8=0$$

$$-4{,}9.t_{vol}{}^2+40{,}96.t_{vol}+1{,}8=0$$

Calcul du discriminant : Δ = (50×sin55)^2 – 4×(-4,9)×1,8 = 1712,81

$$t_{vol} = \frac{-50\times\sin 55-\sqrt{1712{,}81}}{-2\times 4{,}9} = 8{,}4\ \text{s}$$

1.5. (1) On a $y(t)=-\frac{1}{2}.g.t^2+v_0.\sin\alpha.t+h$.

On sait que la fusée commence à éclairer au bout d'une seconde.
Pour connaître l'altitude à partir de laquelle la fusée commence à éclairer, calculons y(t = 1 s).

$y(t=1\ s)=-\frac{1}{2}.g+v_0.\sin\alpha+h=-\frac{1}{2}\times 9{,}8+50\times\sin 55+1{,}8$ = 38 m = **4×10^1 m** avec 1 seul chiffre significatif.

On cherche l'altitude à laquelle la fusée cesse d'éclairer.
La fusée éclaire ensuite de façon intense pendant 6 secondes, elle atteint alors l'altitude y(t = 6 + 1).

$y(t=7\ s)=-\frac{1}{2}\times 9{,}8\times 7^2+50\times\sin 55\times 7+1{,}8$ = 48 m = **5×10^1 m** avec un seul chiffre significatif.

On a trouvé que la fusée éclairait entre 38 et 48 m d'altitude. La fusée étant très haute elle éclaire une large zone, ce qui semble adapté au but recherché.

2. Pour aller un peu plus loin

2.1. (0,5) $\overrightarrow{p_0}=(m_p+m_f).\vec{v}$

(0,25) Avant que la fusée ne quitte le pistolet, on a $\vec{v}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{p_0}=\vec{0}$.

2.2. Éjection de la fusée

2.2.1. (0,5) La quantité de mouvement d'un système isolé se conserve : $\vec{p}=\overrightarrow{Cte}$.

2.2.2. (0,5) Juste après l'éjection de la fusée, la quantité de mouvement du système a pour expression : $\vec{p}=m_p.\overrightarrow{v_p}+m_f.\overrightarrow{v_0}$

Comme $\vec{p}=\overrightarrow{Cte}$ alors $\vec{0}=m_p.\overrightarrow{v_p}+m_f.\overrightarrow{v_0}$

$$\overrightarrow{v_p}=-\frac{m_f}{m_p}.\overrightarrow{v_0}$$

2.2.3. (0,5) Le soldat tient fermement le pistolet lors du tir, ainsi il exerce une force sur le système ce qui réduit la vitesse de recul du pistolet. D'autre part, le système subit des forces de frottement non prises en compte.