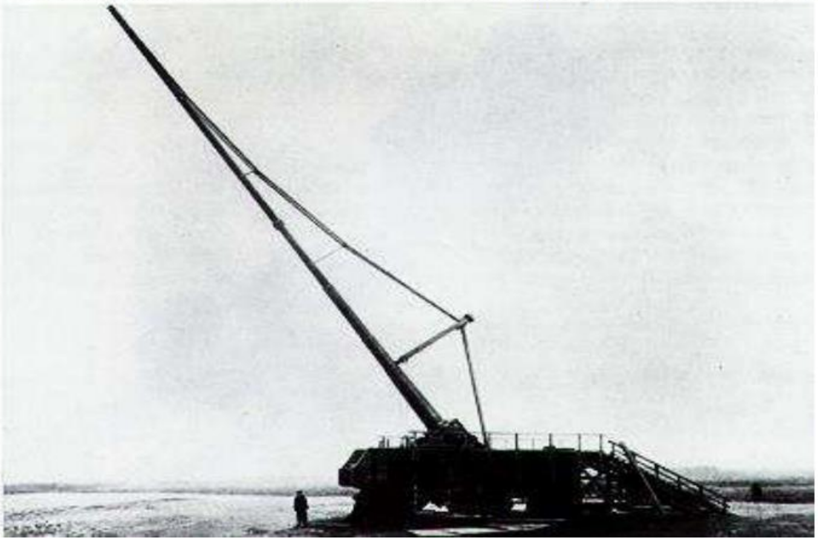
Exercice N°1 :

Souvent confondu à tort avec la grosse Bertha, le canon de Paris est à la fois le plus célèbre et le plus mystérieux des canons de toute l'histoire de l'artillerie. Ce canon a bombardé Paris à la fin de la Première Guerre mondiale.
Le tube du canon mesure 36 m et pèse plus de 100 tonnes. La longueur et la masse exceptionnelles du canon ont obligé les ingénieurs de la société allemande Krupp à concevoir un système de soutènement inédit en artillerie. Comme pour un pont suspendu, des haubans et un mât central viennent rigidifier le long tube, l'empêchant de se courber sous son propre poids. Monté, le canon de Paris atteignait la masse de 750 tonnes.



Mais le secret du canon de Paris réside dans la trajectoire de l'obus. Avec une élévation égale à 50 degrés, le projectile est propulsé dans la haute atmosphère où l'air raréfié oppose moins de résistance à l'obus et accroît ainsi sa portée.
Le 30 janvier 1918, lors des essais finaux au pas de tir de la marine à Altenwalde, le canon tira un obus de 105 kg avec une vitesse d'éjection de 1600 $m.s^{-1}$. La durée de vol de l'obus a été de 176 s et il est tombé à 126 km de distance avec une assez bonne précision.
Les obus ont atteint une altitude de 42 km à l'apogée de leur trajectoire. C'était à l'époque la plus haute altitude jamais atteinte par un projectile lancé par l'homme. Le canon de Paris conserva ce record de 1918 à 1939.

D'après : http://html2.free.fr/canons/canparis.htm

Le but de cet exercice est de vérifier quelques données de ce document sur le vol de l'obus.

Données Intensité de la pesanteur : $g = 9,8\ m.s^{-2}$.
On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
On négligera les frottements et la poussée d'Archimède.
L'obus sera assimilé à un point matériel.
On rappelle que 1 tonne = 10^{3} kg.

1. Expulsion de l'obus

On suppose que le système {tube du canon + obus} est pseudo-isolé pendant cette phase d'expulsion, c'est-à-dire que l'ensemble des forces extérieures appliquées au système se compensent.

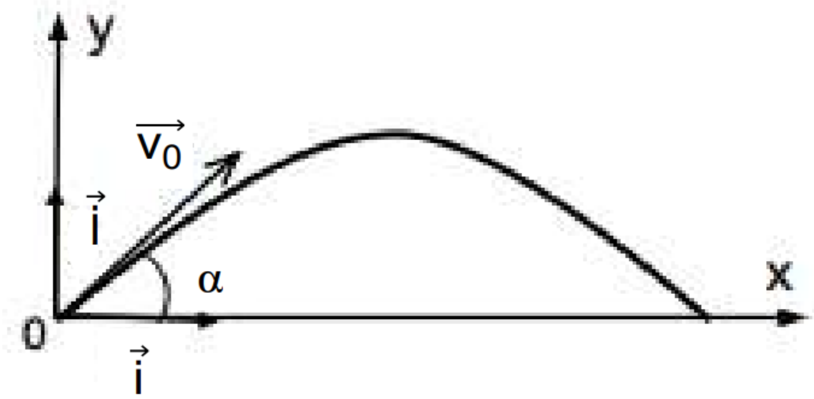
1.1. Comment varie la quantité de mouvement du système pendant cette phase de tir ?

1.2. En déduire la vitesse de recul du tube lors de l'expulsion de l'obus.

1.3. Quelle serait cette vitesse si le tube était 10 fois plus léger (10 tonnes) ? Justifier la masse importante du tube du canon de Paris.

2. Trajectoire de l'obus

On étudie le mouvement de l'obus dans le repère xOy donné ci-dessous.



Le point O est la gueule du canon (l'endroit où l'obus sort du tube du canon).

L'angle α entre le tube du canon et le sol correspond à l'élévation citée dans le document.

$\overrightarrow{v_0}$ est le vecteur vitesse initiale de l'obus à la sortie du canon.

2.1. En utilisant une loi de Newton, déterminer les coordonnées du vecteur accélération de l'obus : $a_x(t)$ suivant l'axe x et $a_y(t)$ suivant l'axe y.

2.2. En déduire les expressions des coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse de l'obus et montrer que les équations horaires du mouvement de l'obus s'écrivent :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t \end{cases}$$

avec t en secondes, v_0 en mètres par seconde et $x(t)$ et $y(t)$ en mètres.

2.3. En déduire l'équation de la trajectoire $y = f(x)$.

3. Vérification des données du document

3.1. En utilisant la question 2.2, déterminer la durée du vol et la portée théorique (distance entre le canon et l'endroit où l'obus touche le sol). On négligera la hauteur du canon et on suppose que l'obus arrive à la même altitude que celle de son point de départ.

3.2. Déterminer l'altitude théorique maximale atteinte par l'obus connaissant l'expression de la composante verticale de la vitesse de l'obus : $v_y = -9{,}8 \times t + 1226$.

3.3. Expliquer l'écart existant entre les résultats théoriques obtenus dans les deux questions précédentes et les données du document.

Exercice N°2 :

Le swing d'un joueur de golf professionnel permet d'envoyer la balle à une distance (appelée « portée ») d'environ 250 mètres, distance mesurée horizontalement par rapport à l'impact initial entre le club et la balle de golf. Le but de cet exercice est de confronter cette valeur de 250 mètres avec l'hypothèse d'un mouvement parabolique et de comprendre le décalage observé en considérant les conditions réelles du mouvement de la balle.

Dans les parties 2 et 3, on cherche à retrouver la valeur de cette portée à partir de deux modèles différents.

1. Vitesse initiale de la balle

Le schéma qui suit propose la reconstruction d'une chronophotographie du mouvement d'une balle de golf après sa propulsion par le club. Le film a été réalisé par une caméra ultra-rapide permettant d'enregistrer 1 000 images par seconde. La représentation ci-dessous (figure 1) montre les 9 premières images de l'enregistrement de la balle, la première image de la balle correspondant à sa position initiale.

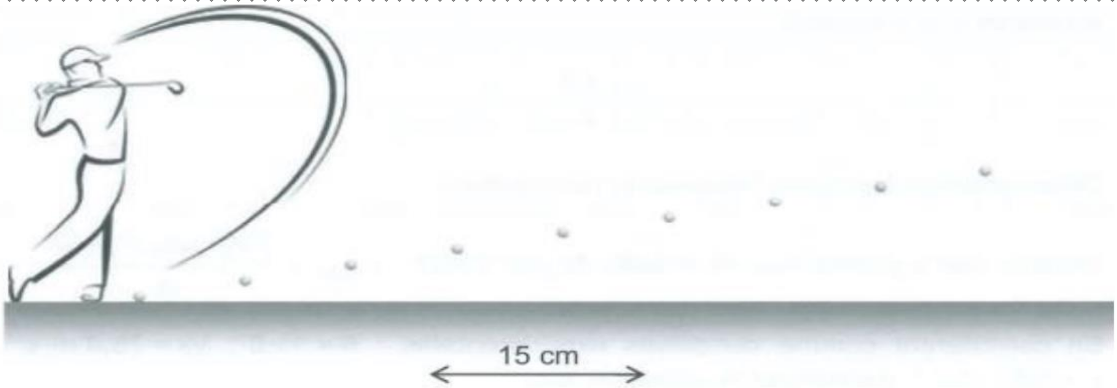


Figure 1

Remarque le golfeur représenté n'est pas à l'échelle de la chronophotographie et n'est ici qu'à titre purement illustratif.

1.1. À partir des données, déterminer l'intervalle de temps Δt qui sépare deux images de la chronophotographie.

1.2. À quel type de mouvement simple peut être assimilé le mouvement de la balle au début du vol représenté sur la figure 1 ?

1.3. En prenant en considération l'échelle proposée, déterminer le plus précisément possible la vitesse initiale V_0 avec laquelle la balle de golf est propulsée.

2. Mouvement de la balle modélisée par un point matériel

La balle de golf est modélisée par un point matériel de masse m = 46 g évoluant dans un champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. Dans ce modèle, la résistance de l'air n'est pas à prendre en compte.

Le mouvement de la balle est étudié dans le système d'axes (Oxy). À la date t = 0 s, elle est placée à l'origine du repère O.

2.1. À partir d'une loi dont on donnera le nom, montrer que les composantes du vecteur accélération $\vec{a}$ s'écrivent :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

2.2. Déterminer les équations horaires du mouvement.

2.3. Montrer que la portée x_{max} de la balle de golf s'écrit : $x_{max} = 2.\dfrac{V_0^{\,2}.\cos(\theta)\sin(\theta)}{g}$.

2.4. En considérant comme conditions expérimentales : θ = 11,0°, V_0 = 75,0 m·s^{-1}, g = 9,81 m·s^{-2}, déterminer la valeur de x_{max}.

2.5. Comparer cette valeur calculée de la portée avec celle annoncée en introduction (les conditions initiales du mouvement restant identiques), et indiquer en quoi la valeur réelle de la portée dans l'air peut sembler surprenante.

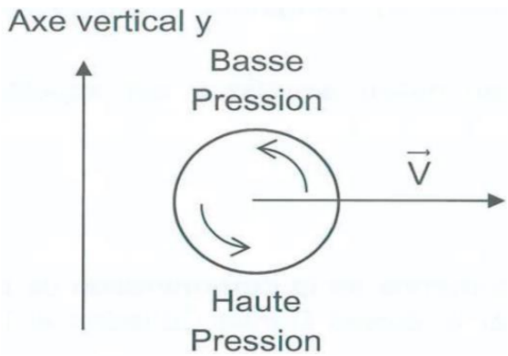
3. De l'importance de l'air dans le vol d'une balle de golf

Dans cette partie, la balle n'est plus modélisée par un point matériel.

Lorsque le golfeur frappe la balle à l'instant t = 0, il utilise un club qui la propulse avec un angle d'une dizaine de degrés par rapport au sol. L'impact du club avec la balle a également pour conséquence de mettre celle-ci en rotation sur elle-même (phénomène de « backspin »). Ces rotations peuvent atteindre la fréquence de 2700 tours par minute.

Document : l'effet Magnus

L'effet Magnus est un phénomène qui se manifeste lorsque la balle possède un mouvement de rotation dans l'air.



Lorsque le golfeur imprime à la balle un mouvement de rotation arrière, appelé « backspin », la balle tourne dans le sens indiqué sur le schéma ci-contre.

L'air qui passe au-dessus de la balle est alors entrainé par la rotation de celle-ci, sa vitesse augmente et sa pression diminue.

Inversement, l'air qui passe au-dessous de la balle verra sa vitesse diminuer et sa pression augmenter.

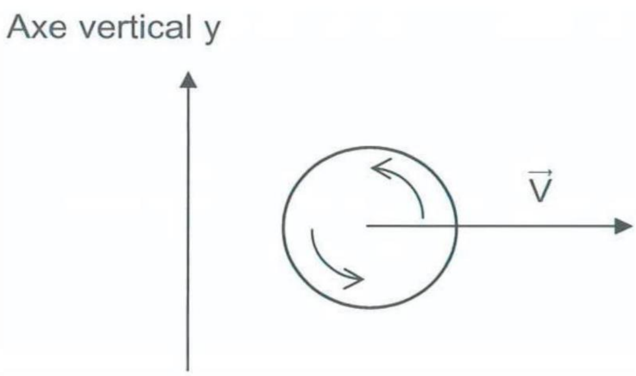
Cette différence de pression est à l'origine d'une force supplémentaire $\vec{F}$ verticale, dirigée vers le haut, supposée appliquée au centre de la balle et constante tout au long du mouvement.

On néglige, dans ce modèle, les autres effets dus à l'air.

3.1. Représenter sur le **document réponse à rendre avec la copie** les forces modélisant les actions mécaniques s'exerçant sur la balle.

3.2. En déduire l'expression de la nouvelle composante a_y de l'accélération verticale en fonction de m, g et F.

3.3. Estimer la valeur de l'intensité de la force $\vec{F}$ pour retrouver la portée effectivement observée.



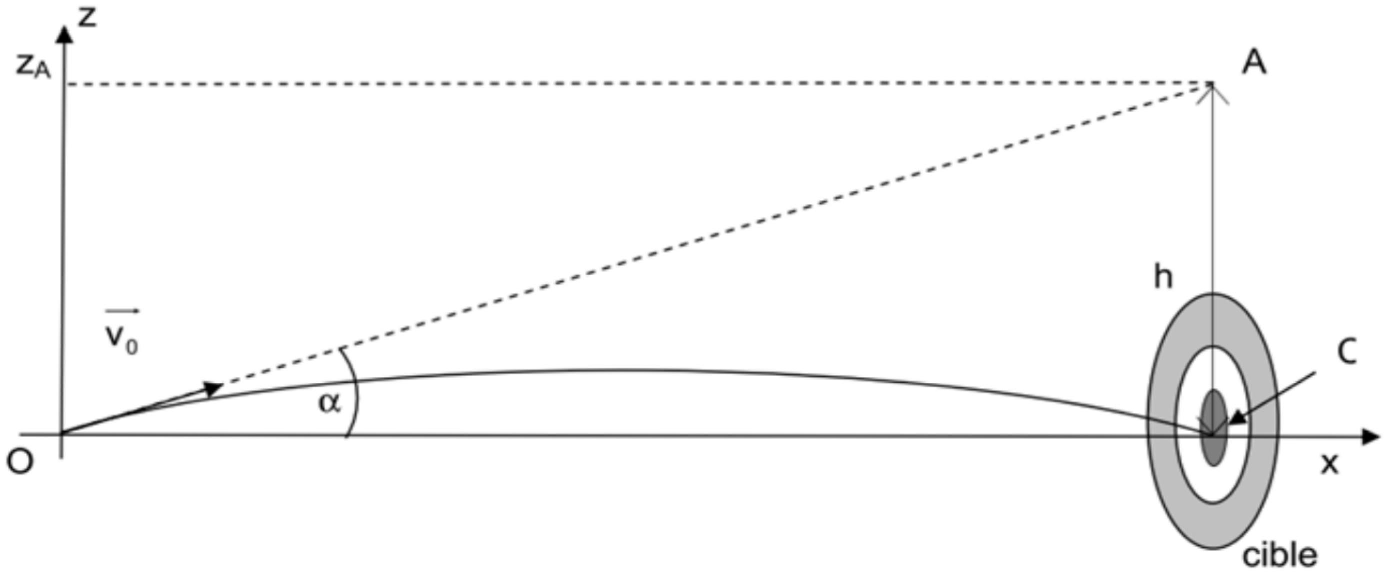
Exercice N°3 :

Rafmaths.com

1. Trajectoire de la flèche :

Sur les cibles de tir à l'arc se trouve un disque central de 10 cm de diamètre. À 70 m, l'archer le voit sous un angle de moins d'un dixième de degré, et doit ajuster la position de la corde et de ses mains au millimètre près […]. Dans quelle direction la flèche doit-elle partir pour parvenir au centre de la cible ? La résistance de l'air a ici relativement peu d'effet. La trajectoire de la flèche est à peu près balistique, c'est-à-dire de forme parabolique.

On étudie dans le référentiel terrestre supposé galiléen le mouvement de la flèche assimilée à un point matériel de masse notée m.
La situation est représentée sur la figure ci-dessous, sans souci d'échelle.
Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est parallèle à l'axe (Oz), On prendra g = 9,8 m.s^{-2}.



1.1. Quelle force peut-on négliger d'après le texte introductif ?

1.2. La poussée d'Archimède étant elle aussi ici négligeable, établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ de la flèche à partir du bilan des forces s'exerçant sur celle-ci.

1.3. On note α l'angle que fait le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$ de la flèche avec l'axe horizontal (Ox). Les équations horaires paramétriques du mouvement du centre d'inertie sont :

$$x(t) = (v_0.\cos\alpha).t \qquad (1)$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + (v_0 \sin\alpha).t \qquad (2)$$

1.3.1. Montrer que l'équation de la trajectoire de la flèche est la suivante :

$$z = -\frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + x.\tan\alpha$$

1.3.2. Justifier la forme de la trajectoire indiquée à la fin du premier texte.

2. « Chute » de la flèche :

Pour une vitesse initiale typique de 70 m/s (250 km/h), le vol dure environ une seconde. Au moment de toucher la cible, la flèche a chuté d'une certaine distance par rapport au point situé dans le prolongement de la direction de la vitesse initiale.
Cette distance de chute, notée h sur la figure, est égale à la moitié du produit de l'accélération de la pesanteur par le carré de la durée du vol ($gt^2/2$). Dans notre exemple, la « chute » est d'environ cinq mètres, d'où l'on déduit que la vitesse initiale de la flèche doit faire un angle de quatre degrés avec la droite joignant le tireur et le centre du blason.

On note A le point situé dans le prolongement de la direction de la vitesse initiale (voir figure).

2.1. Durée du trajet de la flèche :
Soit t_C la date à laquelle la flèche atteint la cible. Cette date est égale à la durée du vol de la flèche.

2.1.1. En utilisant l'équation horaire paramétrique (1), exprimer t_C en fonction de v_0, α et x_C, abscisse du point G, centre de la cible.

2.1.2. Vérifier à l'aide d'un calcul la cohérence des valeurs numériques données dans les deux textes encadrés précédents.

2.2. « *Distance de chute* » :

2.2.1. Quelle hypothèse peut-on faire pour considérer que la flèche atteint le point A en gardant les mêmes conditions initiales de tir ? Préciser alors, en justifiant, la nature du mouvement de la flèche.

2.2.2. On peut considérer que la durée du trajet hypothétique OA de la flèche et la durée t_C du parcours parabolique OC sont identiques.
Exprimer dans ces conditions la « distance de chute » h en fonction de v_0, t_C et α.

2.2.3. En utilisant l'équation horaire paramétrique (2), retrouver alors que la *« distance de chute »* h, pour un tir réalisé dans les conditions réelles, est égale à « $gt^2/2$ », comme indiqué dans le texte ci-dessus.

3. Influence de la valeur de la vitesse initiale sur le tir

On suppose que l'archer vise toujours juste : l'angle α est constant et égal à 4°.
On envisage une augmentation de la vitesse initiale v_0, cette dernière restant cependant suffisamment faible pour permettre à la flèche de toucher la cible.

3.1. Comment évoluent la durée du vol de la flèche et la *« distance de chute »* h ?

3.2. Dans ces conditions, où la flèche va-t-elle frapper la cible ?

Exercice N°4 :

Lors de fouilles préventives sur un chantier de travaux publics, on a retrouvé ce qui ressemble à une arme à feu. Il s'agit d'un ancien pistolet lance-fusées en bronze datant probablement de la première Guerre Mondiale. Il est dans un état de conservation assez remarquable.
Ce type de pistolet était très utilisé lors de cette guerre car, en plus de lancer des fusées éclairantes, il pouvait servir de moyen de communication. En effet, à l'époque très peu de moyens étaient mis à disposition des troupes : les ondes hertziennes étaient très peu utilisées et c'étaient des kilomètres de câbles téléphoniques qui devaient être déroulés pour permettre la transmission de messages divers et variés.
Ainsi les pistolets signaleurs se sont avérés très utiles.

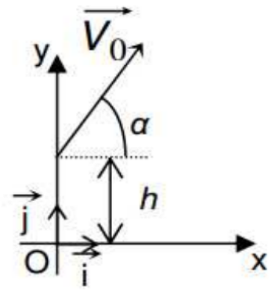

Pistolet lance-fusées (d'après www.histoire-collection.com

1. Durée de visibilité de la fusée
Sur la notice des fusées éclairantes que l'on peut utiliser dans ce type de pistolet, on trouve les informations suivantes :

Cartouche qui lance une fusée éclairante s'allumant 1,0 seconde après son départ du pistolet et éclaire d'une façon intense pendant 6 secondes environ.
Masse de la fusée éclairante : m_f = 58 g.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Le champ de pesanteur terrestre est considéré uniforme, de valeur g = 9,8 m.s^{-2}.
On négligera toutes les actions dues à l'air ainsi que la perte de masse de la fusée pendant qu'elle brille et on considèrera cette dernière comme un objet ponctuel.
On définit un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) avec O au niveau du sol et tel que la position initiale de la fusée éclairante à la sortie du pistolet soit à une hauteur h = 1,8 m. Le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$ est dans le plan (O,x,y) ; Ox est horizontal et Oy est vertical et orienté vers le haut.

À l'instant t = 0 s, le vecteur vitesse de la fusée éclairante fait un angle α égal à 55 ° avec l'axe Ox et sa valeur est v_0 = 50 m.s^{-1}. On pourra se référer au schéma ci-contre.



1.1. Représenter le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ sur le schéma donné en figure 1 de l'**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE** et tracer qualitativement l'allure de la trajectoire suivie par la fusée éclairante dans ce champ de pesanteur.

1.2. En utilisant une loi de Newton que l'on énoncera, déterminer les coordonnées du vecteur accélération de la fusée éclairante : $a_x(t)$ suivant x et $a_y(t)$ suivant y.

1.3. En déduire les expressions des coordonnées $v_x(t)$et $v_y(t)$ du vecteur vitesse de la fusée éclairante et montrer que les équations horaires du mouvement de la fusée s'écrivent $x(t) = v_0.\cos(\alpha).t$ et $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0.\sin(\alpha).t + h$ avec t en seconde, v_0 en mètre par seconde et x(t), y(t) et h en mètre.

1.4. Déterminer la valeur de la durée du vol de la fusée éclairante.

On rappelle qu'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4a.c$ est positif.

1.5. Calculer l'altitude à partir de laquelle la fusée commence à éclairer puis l'altitude à laquelle elle s'arrête. Ces valeurs paraissent-elles adaptées au but recherché ?

2. Pour aller un peu plus loin

Par souci de simplification, on ne considère que le système {fusée – pistolet} et on s'intéresse à sa quantité de mouvement. La masse du pistolet à vide est $m_p = 0{,}98$ kg.

2.1. Exprimer la quantité de mouvement totale $\overrightarrow{p_0}$ du système {fusée - pistolet} avant que la fusée ne quitte le pistolet puis montrer que celle-ci est équivalente au vecteur nul.

2.2. Éjection de la fusée

2.2.1. Que peut-on dire de la quantité de mouvement totale du système {fusée-pistolet} si l'on considère ce système comme un système isolé au cours de l'éjection de la fusée du pistolet ?

2.2.2. En déduire dans ce cas l'expression vectorielle de la vitesse $\overrightarrow{v_p}$ de recul du pistolet juste après l'éjection de la fusée en fonction de la masse du pistolet m_p, de la masse de la fusée m_f et du vecteur vitesse initiale de la fusée $\overrightarrow{v_0}$.

2.2.3. La valeur réelle de la vitesse est beaucoup plus faible que la valeur que l'on obtient à la question précédente. Pourquoi observe-t-on une telle différence ? Justifier la réponse.

Figure 1 : Trajectoire de la fusée éclairante