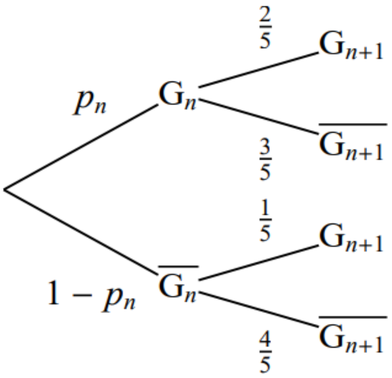
| Terminale | **Série 6** : Probabilité Loi binomiale | OMRI Rafik |
| --- | --- | --- |

Correction

## Exercice N°1 :

1) On a :




2) $p_{n+1} = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}(1-p_n) = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}p_n = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$

3) a) $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}u_n$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5}$.

Le suite $(u_n)$ est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

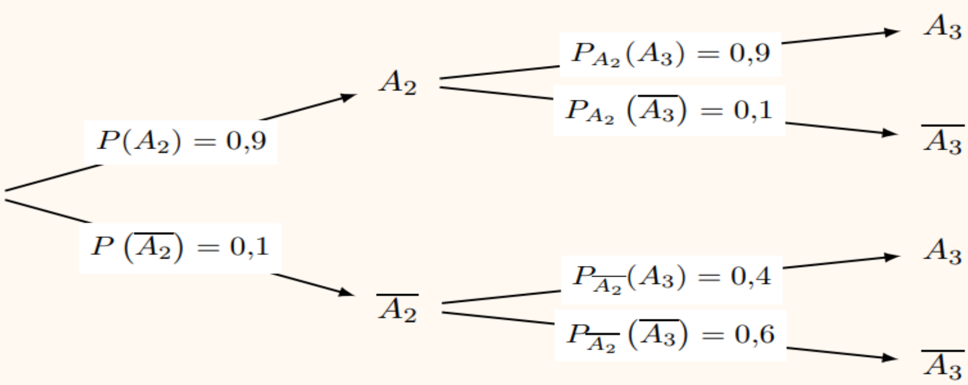
b) On a donc $u_n = u_1\, q^{n-1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ donc $p_n = u_n + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{5} < 1$

Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{4}$

## Exercice N°2 :

**1.a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.**




Rafmaths.com

**1.b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.**

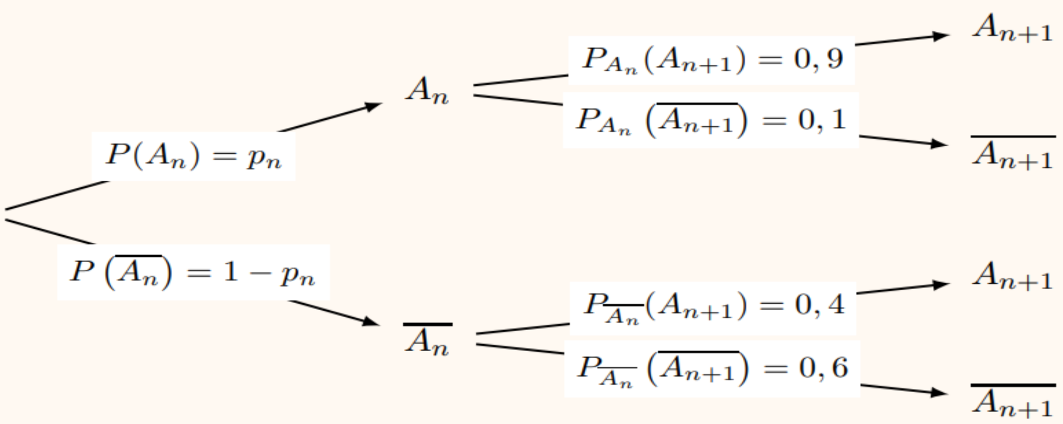
Les évènements $A_2$ et $\overline{A_2}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_3) = P(A_3 \cap A_2) + P\left(A_3 \cap \overline{A_2}\right)$$
$$P(A_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$$
$$P(A_3) = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4$$
$$P(A_3) = 0{,}81 + 0{,}04$$
$$P(A_3) = \underline{0{,}85}$$

**1.c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.**
La probabilité cherchée est $P_{A_3}(A_2)$ soit :

$$\begin{aligned} P_{A_3}(A_2) &= \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{0,9 \times 0,9}{0,85} \\ &= \frac{81}{85} \\ P_{A_3}(A_2) &\approx \underline{0,95} \end{aligned}$$

On peut représenter la situation par l'arbre suivant :




Les évènements $(A_n)$ et $\left(\overline{A_n}\right)$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales on a pour $n$ entier, $n \geqslant 1$ :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) \\ &= 0,9p_n + 0,4(1 - p_n) \\ p_{n+1} &= \underline{0,5p_n + 0,4} \end{aligned}$$

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ le postulat

$$(P_n) \ : \ p_n > 0,8$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, le postulat $(P_1)$ est vrai puisque : $p_1 = 1 > 0,8$.
- **Hérédité**
  Supposons que pour $n$ entier fixé, $(P_n)$ soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n + 1$.
  D'après la question (B.2.) on a :

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : $(P_n)$ soit vérifié et donc que $p_n > 0,8$, on a alors :

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4 > 0,5 \times 0,8 + 0,4 = 0,8$$

On a alors montré que $p_{n+1} > 0,8$ et donc que $(P_{n+1})$ est vrai.

- **Conclusion**
  On a montré que $(P_1)$ est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat $(P_n)$ vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, $(P_{n+1})$ est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{p_n > 0,8}$$

Pour $n$ entier, $n \geqslant 1$ :

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= 0,5p_n + 0,4 - p_n \\ &= -0,5p_n + 0,4 \\ &= 0,5\,(-p_n + 0,8) \end{aligned}$$

Or on vient de montrer dans la question (B.3.a) que $p_n > 0,8$ donc pour $n$ entier, $n \geqslant 1$

$$p_n > 0,8 \Longrightarrow (-p_n + 0,8) < 0$$

Donc

$$0,5\,(-p_n + 0,8) < 0 \Longleftrightarrow p_{n+1} - p_n < 0$$

La suite $(p_n)$ est décroissante.

La suite $(p_n)$ est décroissante et minorée par 0,8, elle est donc convergente vers $L \geqslant 0,8$.

Les suites $(p_n)$ et $(v_n)$ sont définies pour tout entier $n$ par :

$$(p_n) : \begin{cases} p_1 & = 1 \\ p_{n+1} & = 0.5 \times p_n + \ 0{,}4 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_1 & \\ v_n & = p_n - 0{,}8 \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - 0{,}8 \\ v_{n+1} &= (0{,}5\, p_n + \ 0{,}4) \ - 0{,}8 \\ v_{n+1} &= 0{,}5 \times p_n - 0{,}4 \\ v_{n+1} &= 0{,}5 \times \left( p_n + \frac{-0{,}4}{0{,}5} \right) \\ v_{n+1} &= 0{,}5 \times (p_n - 0{,}8) \\ v_{n+1} &= 0{,}5 \times v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)$ est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $v_1 = 0{,}2$ puisque :

$$v_1 = p_1 - 0{,}8$$
$$v_1 = 1 - 0{,}8$$
$$v_1 = 0{,}2$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_1 & = 0{,}2 \\ v_{n+1} & = 0{,}5 \times v_n \end{cases} \quad ; \ \forall n \geqslant 1}$$

La suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $v_1 = 0{,}2$ donc son terme général est

$$\forall n \geqslant 1 \ ; \ v_n = v_1 \times (q)^{n-1}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \ ; \ v_n = 0{,}2 \times (0{,}5)^{n-1}}$$

De l'égalité définie pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$v_n = p_n - 0{,}8$$

On peut en déduire l'expression :

$$p_n = v_n + 0{,}8$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \ ; \ p_n = 0{,}2 \times (0{,}5)^{n-1} + 0{,}8}$$

On a alors pour $n$ entier, $n > 0$ :

$$p_n = 0,2 \times 0,5^{-1} \times 0,5^n + 0,8 = 0,8 + 0,4 \times 0,5^n$$

Soit pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{p_n = 0,8 + \frac{2}{5} \times 0,5^n}$$

**Théorème 1**

Si le réel $q$ est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,5 < 1$ et d'après le théorème 1 on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$ . Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} 0,2 \times (0,5)^{n-1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \Big( \underbrace{0,2 \times (0,5)^{n-1} + 0,8}_{p_n} \Big) = 0,8$$

Ce qui nous donne la limite de la suite $(p_n)$ :

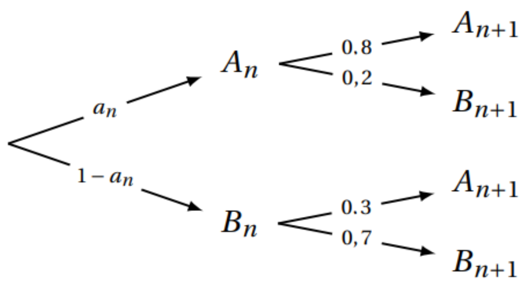
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8}$$

Rafmaths.com

Cela signifie qu'à long terme, la probabilité qu'un client achète un melon sera de 0,8.

**Exercice N°3 :**

**1. a.** *Arbre pondéré complet*




**b.** Les évènements $A_n$ et $B_n$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_n \cap A_{n+1}) + P_{B_n}(B_n \cap A_{n+1})$$
$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3(1-a_n)$$
$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$

**1.** *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

**a.** Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$ :

- Initialisation :
  $a_1 = a = 0,5$ donc $0 \leqslant a_1 \leqslant 0,6$ La propriété est vraie au rang 1
- Hérédité :
  On suppose que pour un entier naturel $n \geqslant 1$ arbitraire on a $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$ et sous cette hypothèse on va prouver que $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6$

$$0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$$
$$0 \leqslant 0,5 \times a_n \leqslant 0,5 \times 0,6 \quad \text{en multipliant par } 0,5$$
$$0 \leqslant 0,5a_n \leqslant 0,3$$
$$0 \leqslant 0,3 \leqslant 0,3 + 0,5a_n \leqslant 0,6 \quad \text{en ajoutant } 0,3$$
$$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6.$$

  La propriété se transmet au rang suivant.
- Conclusion
  La propriété est vraie au rang 1 et, elle est héréditaire à partir de ce rang donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

**b.** Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n$$
$$= -0,5a_n + 0,3.$$

Or, d'après la question précédente, on a :

$$a_n \leqslant 0,6$$
$$-0,5a_n \geqslant -0,3 \quad \text{en multipliant par -0,5}$$
$$-0,5a_n + 0,3 \geqslant 0 \quad \text{en ajoutant } 0,3$$
$$a_{n+1} - a_n \geqslant 0.$$

La suite est donc croissante.

**c.** La suite est croissante et majorée par 0,6, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite est convergente vers une limite $\ell \leqslant 0,6$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5a_n + 0,3) = 0,5\ell + 0,3$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$.

Donc, par unicité de la limite, on a : $0,5\ell + 0,3 = \ell$ donc $0,3 = 0,5\ell$ qui donne $\boxed{\ell = 0,6}$.

La suite $(a_n)$ converge vers 0,6.

**2.** *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel $a$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

**a.** Pour tout $n$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,6 \\ &= 0,5a_n + 0,3 - 0,6 \\ &= 0,5a_n - 0,3 \\ &= 0,5(a_n - 0,6) \\ &= 0,5u_n \end{aligned}$$

La suite $(u_n)$ est donc géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$.

**b.** Puisque $(u_n)$ est géométrique, $u_n = u_1 q^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

Comme $u_n = a_n - 0,6$, on a : $a_n = u_n + 0,6$ donc $\boxed{a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6}$.

**c.** $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ d'où, par produit et par somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,6}$.

Cette limite ne dépend pas de la valeur de $a$.

**d.** Sur le long terme, la probabilité que le joueur fasse une partie de type $A$ est 0,6 et donc celle qu'il fasse une partie de type $B$ est 0,4. Le joueur verra plus souvent la publicité insérée dans les jeux de type $A$.