Terminale	Série 6 : Probabilité Loi binomiale	OMRI Rafik

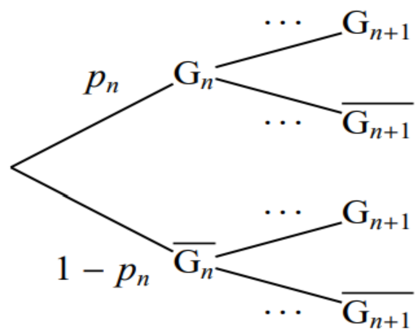
Exercice N°1 :

Un site internet propose un jeu en ligne dont les probabilités sont les suivantes :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante vaut $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante vaut $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

   a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

   b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

   c) Déterminer la limite de p_n.

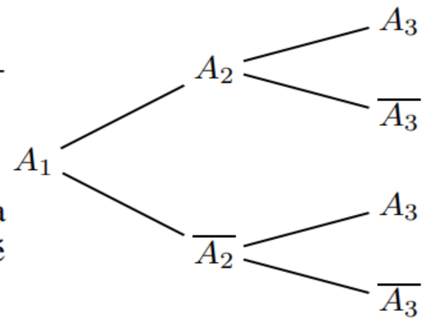
Exercice N°2 :

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1.



1. a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.

1. b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

1. c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4.$$

3.

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.

3. b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

3. c. La suite (p_n) est-elle convergente ?

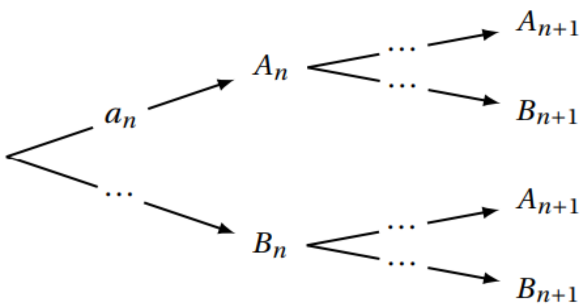
Exercice N°3 : Métropole juin 2019

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :
- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de $0,8$;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de $0,7$.

Pour une entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :
A_n : «la n-ième partie est une partie de type A.»
B_n : «la n-ième partie est une partie de type B.»
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre



b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

a. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a?

d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo?