Terminale	Série 1 : Fonction ln	OMRI Rafik

Exercice N°1 : Correction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$f(x) = x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \frac{3}{x}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

$$f'(x) = 1 + 0 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$$

3. **a.** On cherche le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$:
$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

x	0		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

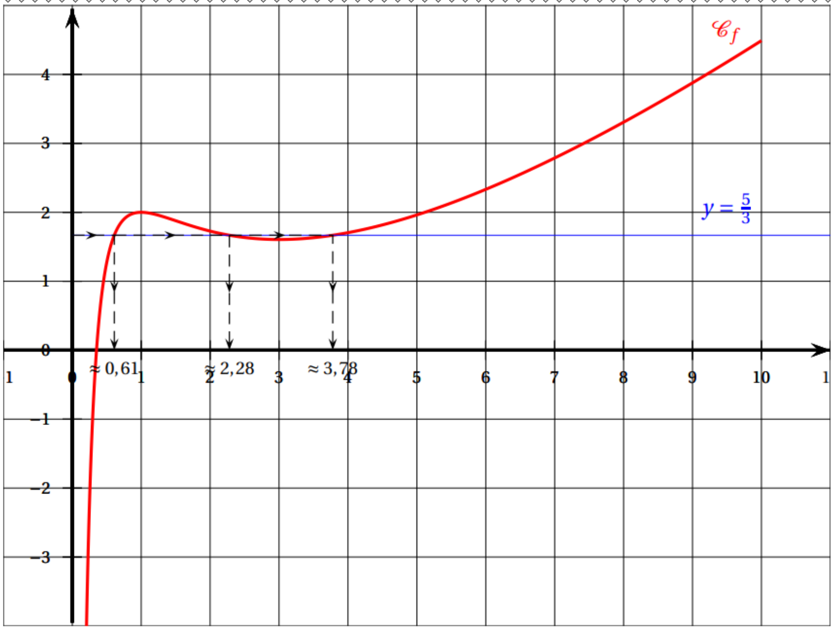
$f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \dfrac{3}{1} = 2$; $f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \dfrac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \approx 1{,}69$

On établit le tableau des variations de f en admettant que que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6-4\ln(3) \approx 1{,}61$	$\nearrow$	$+\infty$

b.
- $\dfrac{5}{3} \in]-\infty\,;\,2]$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.
- $\dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$ et $f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1{,}61$ donc $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.
- $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.
Voir cidessus les valeurs approchées des solutions.



4. Pour étudier la convexité de f, on détermine le signe de f'', la dérivée seconde de f.

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$ donc

$f''(x)=\dfrac{(2x-4)\times x^2-(x^2-4x+3)\times 2x}{x^4}=\dfrac{(2x^2-4x-2x^2+8x-6)\times x}{x^4}=\dfrac{4x-6}{x^3}$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
	‖	f concave		f convexe	

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x=\dfrac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}+4-4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{3}{\frac{3}{2}}=\dfrac{11}{2}-4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-2=\dfrac{7}{2}-4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{7}{2}-4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.

Exercice N°2 :

Partie I : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x)+2x-2$.

1. On détermine les limites de g en $+\infty$ et 0.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}2x-2=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0}2x-2=-2\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}g(x)=-\infty$$

2. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et $g'(x)=\dfrac{1}{x}+2>0$; donc la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. On établit le tableau des variations de la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. $g(1) = 0$ donc $\alpha = 1$.
On en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$, et que $g(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

Partie II : étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$par : $f(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 1]$.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :
$f'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)(\ln(x) - 1) + \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(x) - 1 + 2x - 1}{x^2} = \dfrac{\ln(x) + 2x - 2}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

   b. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qui s'annule pour $x = 1$.
$f(1) = \left(2 - \dfrac{1}{1}\right)(\ln(1) - 1) = -1$
On dresse le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. $f(x) = 0 \iff \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1) = 0 \iff 2 - \dfrac{1}{x} = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0$

$\iff 2 = \dfrac{1}{x}$ ou $\ln(x) = 1 \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = \mathrm{e}$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $]0\,;\,+\infty[$: $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \mathrm{e}$.
On complète le tableau de variations de f en intégrant les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1		e		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit le tableau de signes de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie III : étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

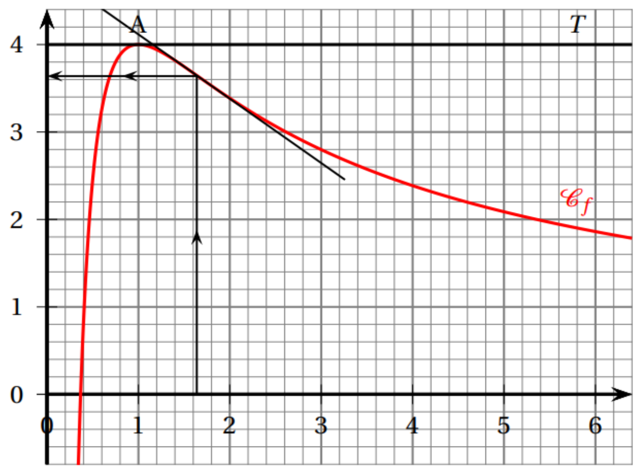
On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f. Ainsi, on a : $F' = f$. On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Par définition $F' = f$, donc le signe de $F'(x)$ est celui de $f(x)$. On en déduit les variations de la fonction F sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	‖	+	0	−	0	+	
F	‖	F croissante		F décroissante		F croissante	

2. Le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ à la courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F est $F'(a)$ soit $f(a)$. Pour que $\mathscr{C}_F$ admette des tangentes parallèles à l'axe des abscisses, il faut trouver des valeurs de x pour lesquelles $F'(x) = 0$ c'est-à -dire $f(x) = 0$.
D'après les questions précédentes, on peut dire $\mathscr{C}_F$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = \mathrm{e}$.

Exercice N°3 :



1. Par lecture graphique : $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.

3. En utilisant les lectures du **1.** :
$f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4$;
$f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. • On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$;

• On a $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln x}{x}$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4\ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5. On a donc sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.

On sait que sur $]0\,;\,1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0;\,1[$;

Par contre sur $]1\,;\,+\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$;

$f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1;\,4)$ est le maximum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0;1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x=1$.

6. f' étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f''(x)=\dfrac{-4\times\frac{1}{x}\times x^2-2x\times(-4\ln x)}{x^4}=\dfrac{-4x+8x\ln x}{x^4}=\dfrac{-4+8\ln x}{x^3}$.

7. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :
$f''(x)=0\iff\dfrac{-4+8\ln x}{x^3}=0\iff -4+8\ln x=0\iff -1+2\ln x=0\iff \ln x=\dfrac{1}{2}\iff$
$x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\approx 1,649$ (ou $\sqrt{\mathrm{e}}$).

L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{4+4\times\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}}\approx 3,639$.

Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.

Exercice N°4 :

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to0}x^2=\lim\limits_{x\to0}-6x=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0}-4\ln x=-\infty$ et par somme de limites : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$.
Graphiquement ce résultat montre que la droite d'équation $x=0$ (axe des ordonnées est asymptotoe verticale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

b. On a puisque $x>0$, $\quad x^2-6x=x^2\left(1-\dfrac{6}{x}\right)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x}=0$, donc
- $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{6}{x}=1$ (par somme de limites), puis
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, d'où
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\dfrac{6}{x}\right)=+\infty$ (par produit de limites) ; enfin
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, donc finalement :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (par somme de limites).

2. **a.** Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x)=2x-6+4\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-6x+4}{x}$.

b. Comme $x>0$, le signe du quotient est celui du numérateur, donc du trinôme $2x^2-6x+4$ ou plus simplement du trinôme x^2-3x+2.
Celui-ci a une racine évidente : 1 et l'autre 2 (puisque le produit des racines est 2).

On alors que $f'(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]1;2[$ où $f'(x)<0$
La fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $]1;2[$ où elle est décroissante.
On a $f(1)=1-6+4\ln1=0-5=-5$ et $f(2)=4-12+4\ln2=\ln2-8$.
D'où le tableau de variations :

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\ln(2)-8$	$\nearrow$	$+\infty$

3. • On a $f(4)=16-24+4\ln4=-8+8\ln2\approx-2,45$ et $f(5)=25-30+4\ln25=4\ln25-5\approx 7,88$;
• Sur l'intervalle $[4;5]$, la fonction est continue car dérivable et strictement croissante, donc :

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]4\,;\,5[$ tel que $f(\alpha) = 0$

4. $f''(x) = \dfrac{2x^2-4}{x^2}$.

a. On a $2x^2-4=0 \iff 2\left(x^2-2\right)=0 \iff x^2-2=0 \iff \left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=0 \iff$
$\begin{cases} x+\sqrt{2}=0 \\ x-\sqrt{2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{cases}$

Le trinôme, donc $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}[$ ou ici puisque $x>0$, $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]0\,;\,\sqrt{2}[$. Conclusion :

- Sur l'intervalle $]0\,;\,\sqrt{2}]$, $f''(x)<0$, la fonction f est concave;
- Sur l'intervalle $]\sqrt{2}\,;\,+\infty]$, $f''(x)>0$, la fonction f est convexe;
- $f''\left(\sqrt{2}\right)=0$: le point d'abscisse $\sqrt{2}$, donc d'ordonnée $f\,() = 2-6\sqrt{2}+4\ln\sqrt{2} = 2-6\sqrt{2}+4\times\dfrac{1}{2}\ln 2 = 2-6\sqrt{2}+2\ln 2$ est le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, car en ce point la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

b. • Pour $k \in]0\,;\,\sqrt{2}[$, $[\mathrm{A}M_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction concave donc $[\mathrm{A}M_k]$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.

• Pour $k \in]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, $[\mathrm{A}M_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction convexe donc $[\mathrm{A}M_k]$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

Exercice N°5 :

1. • $g(1) = 2\times 0 - 1\times 0 = 0$;

• $g(\mathrm{e}) = 2\times(\mathrm{e}-1) - \mathrm{e}\times\ln\mathrm{e} = 2\mathrm{e}-2-\mathrm{e}\ln\mathrm{e} = \mathrm{e}-2$.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+0} g(x) = -2$.

3. g est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = 2\times 1 - \ln x - x\times\dfrac{1}{x} = 2-\ln x - 1 = 1-\ln x$.

Étude du signe de la dérivée : $g'(x) = 1-\ln x$:

• $1-\ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln\mathrm{e} > \ln x \iff \mathrm{e} > x$, donc g est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$;

• $1-\ln x < 0 \iff 1 = \ln x \iff \ln\mathrm{e} = \ln x \iff \mathrm{e} = x$, donc g est décroissante sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$;

• $1-\ln x = 0 \iff 1 < \ln x \iff \ln\mathrm{e} < \ln x \iff \mathrm{e} < x$, donc $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}-2$ est le maximum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

D'où le tableau de variations de g :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
g	|| -2	$\nearrow$	$\approx 0,718$	$\searrow$	$-\infty$

4.

• Sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, la fonction g est dérivable, donc continue; comme $-2<0<\mathrm{e}$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique β de l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, tel que $g(\beta)=0$. Or de façon évidente $g(1)=0$, donc $\beta=1$;

• Sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, la fonction g est dérivable, donc continue; comme $0,718>0$, il existe un réel unique α tel que $g(\alpha)=0$, avec $\alpha \in]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

On a $g(4,9)\approx 0,01$ et $g(5,0)\approx -0,05$, donc $4,9<\alpha<5,0$;

$g(4,92)\approx 0,0009$ et $g(4,93)\approx -0,005$, donc $4,92<\alpha<4,93$.

5. D'après la question précédente on peut dresser le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

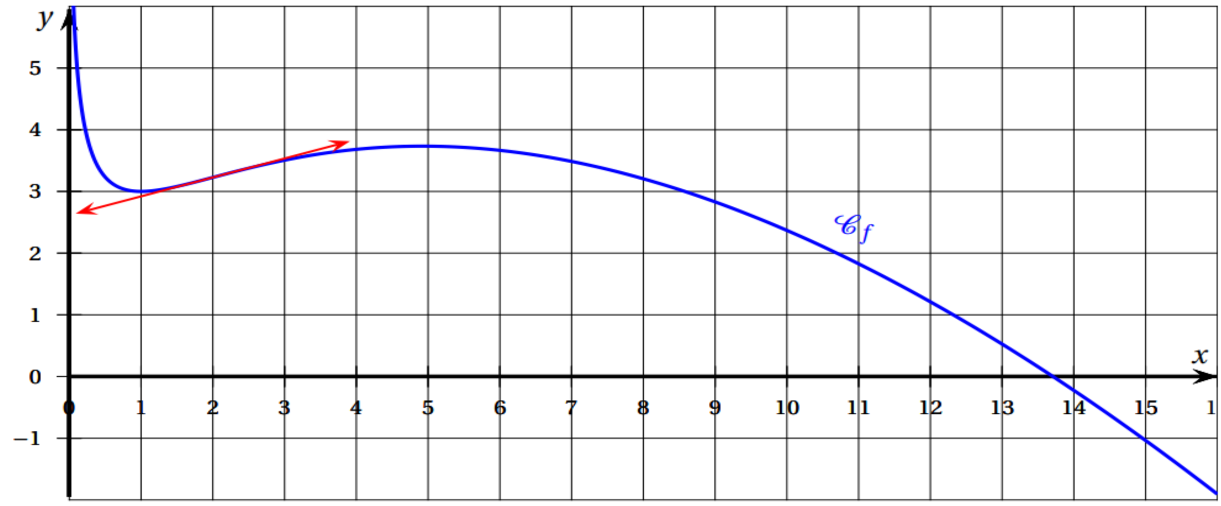
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous. On admet que : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.



1. On a : $f(x) = x\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right]$;

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[3 - \ln x - 2\frac{\ln x}{x}\right] = -\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. Sur $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction f somme de produits de fonctions dérivables sur cet intervalle est dérivable et :

$f'(x) = 3 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{x} = 3 - \ln x - 1 - \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x - x\ln x - 2}{x} = \dfrac{(x-1) - x\ln x}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.

b. Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $g(x)$ étudié à la question 5. de la partie A.

Donc $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$: f est croissante sur cet intervalle ;

$f'(x) < 0$ sur $]0\ ;\ 1[$ et sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$: f est décroissante sur ces deux intervalles : $(f(\alpha) \approx 3,73)$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$\approx 3,73$	↘	$-\infty$

3. Comme $x^2 > 0$, pour $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2 - x$:

- $2 - x > 0 \iff x < 2$ donc sur $[0;2]$ la fonction f est convexe;
- $2 - x < 0 \iff x > 2$ donc sur $[2\,;\,+\infty]$ la fonction f est concave;
- $2 - x = 0 \iff x = 2$ donc le point de coordonnées $(2\,;\,f(2))$ est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

$f(2) = 6 - 2\ln 2 - 2\ln 2 = 6 - 4\ln 2 \approx 3,23$. (voir la figure : la tangente au point d'abscisse 2 traverse la courbe)