Exercice N°1 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$
3. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.
4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
   On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Exercice N°2 :

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

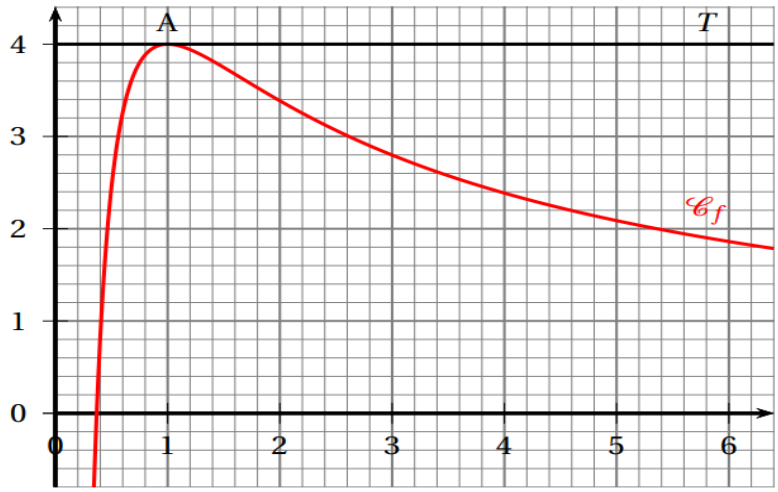
Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f. Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. La courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses? Justifier la réponse.

Exercice N°3 :

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4).



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

Exercice N°4 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
En déduire le tableau de variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4\,;\,5]$.

4. On admet que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

b. On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\,;\, f\left(\sqrt{2}\right)\right)$.
Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t\,;\, f(t))$.
En utilisant la question 4. a, indiquer, selon la valeur de t, les positions relatives du segment $[\mathrm{A}M]$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice N°5 :

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +0} g(x)$ en justifiant votre démarche.

3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\,;\,+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.

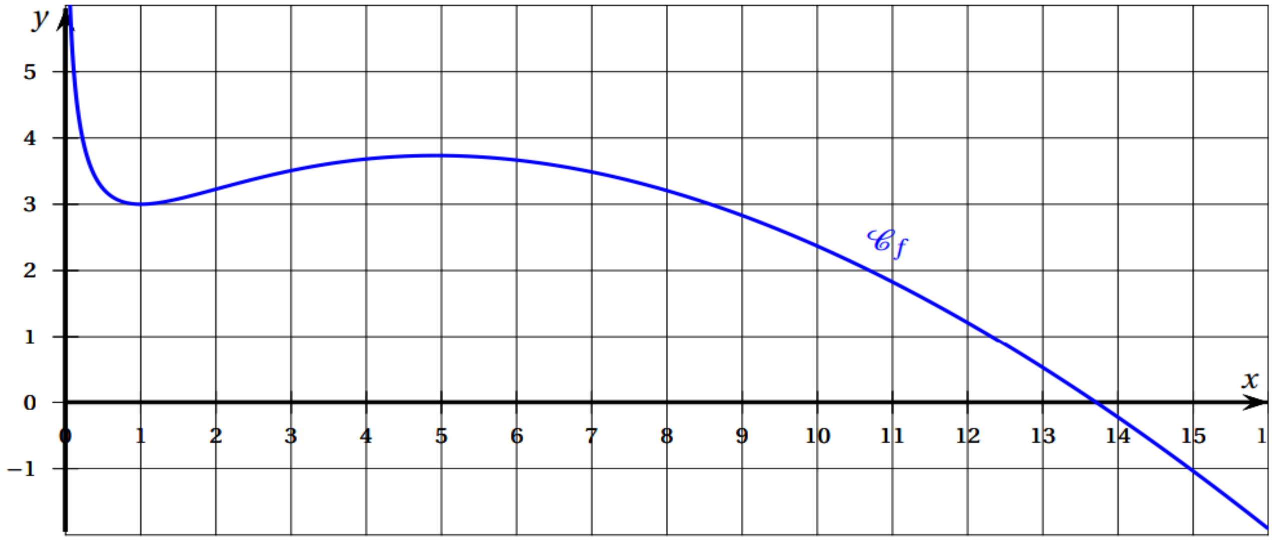
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. **a.** Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.

   Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.