Correction

Exercice N°1 :

1) En $-\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1 = 1\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

2) En $+\infty$, on change la forme : $f(x) \overset{\div e^x}{=} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ par somme et quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3) a) La fonction f est dérivable que $\mathbb{R}$ par opération de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{2}$	↗ 1

Exercice N°2 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}(e^{-x}+e^x) = f(x)$.

La fonction f est paire donc $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\end{array}\right\}$ par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Par somme et produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Par symétrie de la fonction paire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. D'où $f'(x) = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$.

$f'(x) > 0 \iff -\dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0 \iff e^x - e^{-x} < 0 \iff e^x < e^{-x} \iff x < -x \iff x < 0$.

On obtient le tableau de variation suivant :

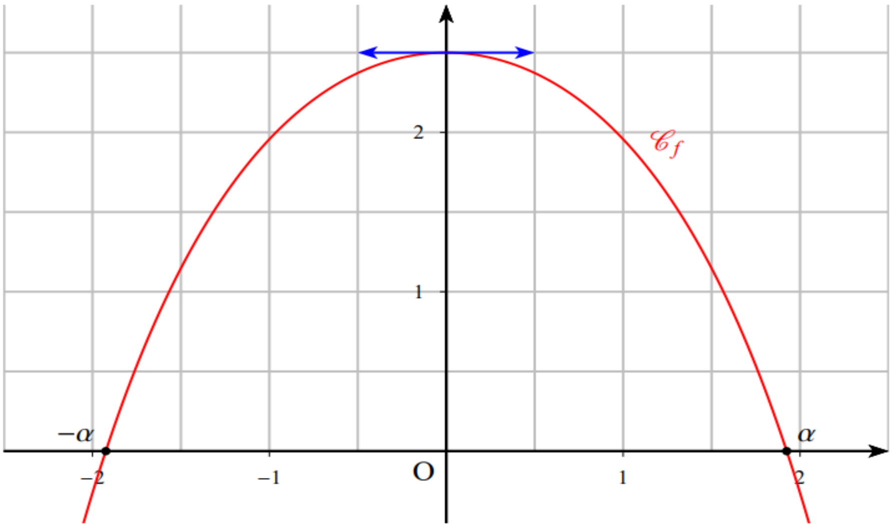
$f(0) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}(1+1) = \dfrac{5}{2}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{5}{2}$	↘ $-\infty$

4) Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable), monotone (croissante) et change de signe car $f(0) = \dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet un unique solution α.

Par symétrie de $\mathscr{C}_f$ on déduit que $-\alpha$ est aussi solution de $f(x) = 0$ sur $]-\infty\ ,\ 0]$.
L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et ces solutions sont opposées.

Pour information : $\alpha = 1,925$ à 10^{-3}.



Exercice N°3 :

1) On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > x \ \Leftrightarrow\ e^x - x > 0$.
Le dénominateur n'est donc jamais nul. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) a) Si x est non nul, on divise numérateur et dénominateur par x : $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$.

b) • En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• En $-\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ par somme et quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

• $\mathscr{C}_f$ admet 2 asymptotes horizontales $y = 0$ en $+\infty$ et $y = -1$ en $-\infty$.

3) a) $f'(x) = \dfrac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$.

b) • $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
• Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - x)$.

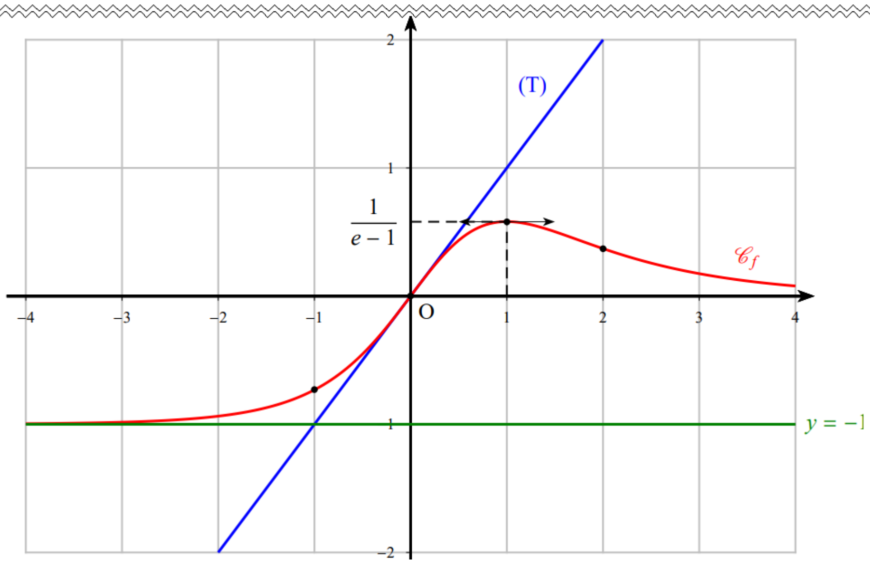
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4) L'équation de la tangente en 0 : $y = f'(0)x + f(0) \ \Leftrightarrow\ y = x$

5) Pour tracer soigneusement $\mathscr{C}_f$, on calcule quelques images :

$f(1) = \dfrac{1}{e-1} \approx 0,58$, $f(0) = 0$, $f(-1) = \dfrac{-1}{e^{-1}+1} \approx -0,73$, $f(2) = \dfrac{2}{e^x - 2} \approx 0,37$

On peut remarquer qu'en $x = 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.



Exercice N°4 :

Partie A

1) $g'(x) = e^x - 1$ et $e^x - 1 = 0 \iff x = 0$.

   Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ si $x > 0$.

   Le fonction g est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$

2) $g(0) = 0$ comme g est croissante sur $[0; +\infty[$, donc la fonction g est positive si $x > 0$

3) Comme $g(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$, on a $e^x - x \geqslant 1 > 0$.

Partie B

1) Comme f est strictement croissante sur $[0\,;1]$: $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$

   or $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{e-1}{e-1} = 1$ donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

   La fonction f est stable sur $[0\,;1]$.

2) a) On a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) + x^2 - 1}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) + (x-1)(x+1)}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) - (1-x)(x+1)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x} \end{aligned}$$

   b) Si $x \in]0; 1[$ on a : $1 - x > 0$, $g(x) > 0$, $e^x - x > 0$

   Donc si $x \in]0; 1[$ $f(x) - x > 0$. La courbe (C) est donc au dessus de la droite (D). La droite (D) coupe (C) en 0 et 1 car $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Partie C

1) Cf annexe

2) Soit $P_n : \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Montrons P_n par récurrence :

- **Initialisation :** on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right)$

  or f est croissante et stable dans [0, 1], donc $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. P_0 est vraie.

- **Hérédité :** On suppose que : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Comme la fonction f est croissante et stable sur [0; 1], on a :

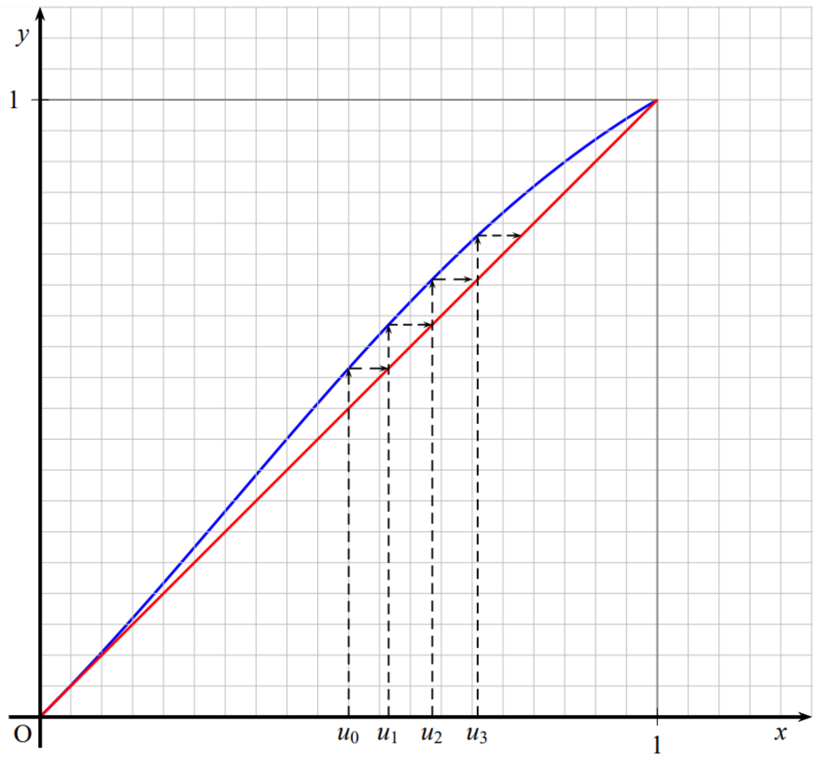
$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$

  P_n est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, la proposition P_n est vrai pour tout entier naturel n.

3) La suite (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 1, donc la suite (u_n) est convergente. Comme la fonction f est continue sur [0; 1], d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie : $\ell = f(\ell)$.

De plus de la partie B, on sait que l'équation $f(x) - x = 0$ sur $[0\,;1]$ admet comme solution 0 et 1. Comme $\ell \geqslant \frac{1}{2}$, on a $\ell = 1$.



Exercice N°5 :

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

a) Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Par produit et somme} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et somme de fonctions dérivables :

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2)$$

Comme $x \geqslant 0$, $e^x > 0$ et $x + 2 > 0$. Donc $g'(x) \geqslant 0$, la fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

b) Sur $\mathbb{R}_+$,
- la fonction g est continue (car dérivable), monotone (croissante)
- et $0 \in g(\mathbb{R}_+) = [-1; +\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(a) = 0$

c) A l'aide d'une méthode par dichotomie, on trouve : $0,703 \leqslant a \leqslant 0,704$

d) Comme la fonction g est croissante, on a :
- Si $x < a$, $g(x) < 0$
- Si $x > a$, $g(x) > 0$

2) **Étude de la fonction f**

a) On détermine les limites en 0 et $+\infty$ par somme :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

b) On a : $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2e^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) D'après l'étude de la fonction g, on a sur $\mathbb{R}_+^*$, le tableau de variation suivant :

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Le minimum m de la fonction vaut : $f(a) = e^a + \dfrac{1}{a}$

or, on sait que $g(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2e^a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^a = \dfrac{1}{a^2}$

En remplaçant, on trouve alors : $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$

e) D'après la question 1c), on sait que : $0,703 \leqslant a \leqslant 0,704$
Comme la fonction inverse est décroissante et la fonction carrée croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors :

$$\frac{1}{0,704} \leqslant \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{0,703} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{0,704^2} \leqslant \frac{1}{a^2} \leqslant \frac{1}{0,703^2}$$

Par somme, on obtient alors : $\dfrac{1}{0,704} + \dfrac{1}{0,704^2} \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{0,703} + \dfrac{1}{0,703^2} \quad \Leftrightarrow$
$3,43 \leqslant m \leqslant 3,45$