Terminale | **Série 1 : Fonction exponentielle** | OMRI Rafik

Exercice N°1 :

Soit le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

1) En mettant en évidence les limites de référence si besoin, déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2) a) Déterminer la dérivée de la fonction f.
   b) En déduire le tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Exercice N°2 :

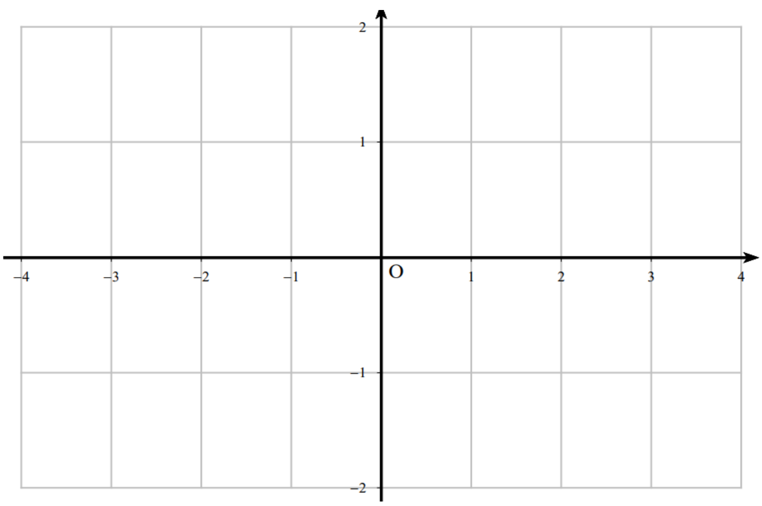
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Calculer $f(-x)$. Que peut-on conclure sur $\mathscr{C}_f$
2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet un unique solution α dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$, puis justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et que ces solutions sont opposées.

Exercice N°3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Pourquoi la fonction f est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
2) a) Montrer que si $x \neq 0$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$
   b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter géométriquement.
3) a) Déterminer la fonction dérivée f'.
   b) Étudier le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5) Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}_f$, en indiquant la tangente horizontale, et la tangente (T) sur l'annexe ci-jointe.



Exercice N°4 :

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$

1) Étudier les variations de la fonction g.
2) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3) En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
2) Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
   b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0\,;\,1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2) Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°5 :

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**
   a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.
   Étudier le sens de variation de la fonction g et déterminer la limite de g en $+\infty$. On dressera le tableau de variation.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   c) Déterminer un encadrement de a à 10^{-3}
   d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2) **Étude de la fonction f**
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel : $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.
   e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.