Série N°1	Dérivation	$1^{ère}$ Spé

Correction

Exercice N°1 :

1) Une fonction f admet un nombre dérivé, noté $f'(a)$, en a, si et seulement si, le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite, c'est à dire :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice N°2 :

1) On a le tableau suivant :

x	-6	-3	-1	3	6
$f(x)$	-1	-2	1	3	0
$f'(x)$	-1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$

2) On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$ et $h = 0,12$, et on dérive $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On a alors :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) \quad \Leftrightarrow \quad f(9,12) \approx f(9) + 0,12 f'(9) \quad \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{9,12} \approx \sqrt{3} + 0,12 \times \frac{1}{2\sqrt{9}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{9,12} \approx 3,02$$

Valeur à comparer avec la valeur que donne la calculatrice : $\approx 3,019\,933$.

Exercice N°3 :

Fonction	Dérivabilité	Dérivée
1) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 3x + 2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 12x^2 - 18x + 3 = 3(4x^2 - 6x + 1)$
2) $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \dfrac{6}{x^4}$.
3) $f(x) = \sqrt{4x+1}$	$\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$	$f'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$
4) $f(x) = \dfrac{4}{1+3x}$	$\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$	$f'(x) = \dfrac{4\times(-3)}{(1+3x)^2} = \dfrac{-12}{(1+3x)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{x^2+9-2x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{9-x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{(x^2+9)^2}$
6) $f(x) = x\sqrt{2x-3}$	$\left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$	$f'(x) = \sqrt{2x-3} + \dfrac{2x}{2\sqrt{2x-3}} = \dfrac{2x-3+x}{\sqrt{2x-3}} = \dfrac{3(x-1)}{\sqrt{2x-3}}$
7) $f(x) = x - \dfrac{4x+1}{7x+2}$	$\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{7}\right\}$	$f'(x) = 1 - \dfrac{4(7x+2)-7(4x+1)}{(7x+2)^2} = 1 - \dfrac{1}{(7x+2)^2} = \dfrac{(7x+2)^2-1}{(7x+2)^2} = \dfrac{(7x+2-1)(7x+2+1)}{(7x+2)^2} = \dfrac{(7x+1)(7x+3)}{(7x+2)^2}$
8) $f(x) = (3x+5)^4$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 4 \times 3(3x+5)^3 = 12(3x+5)^3$

Exercice N°4 :

On utilise la formule suivante $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ pour déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

1. $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(1) = 3$ et $f(1) = 1$.

   Ainsi une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = 3(x-1)+1$ soit $y = 3x-2$.

2. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(-2) = -\dfrac{1}{4}$ et $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$.

   Ainsi une équation de la tangente au point d'abscisse -2 est $y = -\dfrac{1}{4}(x+2) - \dfrac{1}{2}$ soit $y = -\dfrac{1}{4}x - 1$

3. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$ donc $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} + 6 = \dfrac{\sqrt{3}}{6} + 6$ et $f(3) = \sqrt{3} + 9$.

   Ainsi une équation de la tangente au point d'abscisse 3 est $y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{6} + 6\right)(x-3) + \sqrt{3} + 9$ soit

   $y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{6} + 6\right)x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 9$

4. $f'(x) = \dfrac{(-2x+3)-(x-1)\times(-2)}{(-2x+3)^2} = \dfrac{1}{(-2x+3)^2}$ donc $f'(-1) = \dfrac{1}{25}$ et $f(-1) = -\dfrac{2}{5}$.

   Ainsi une équation de la tangente au point d'abscisse -1 est $y = \dfrac{1}{25}(x+1) - \dfrac{2}{5}$ soit $y = \dfrac{1}{25}x - \dfrac{9}{25}$.