Exercice N°1 :

- $A = e^3 \times e^4 = e^{3+4} = e^7$
- $B = \frac{e^{-5}}{e^2} = e^{-5-2} = e^{-7}$
- $C = \frac{e^{5x+7} \times e^{-x-3}}{e^{2x+3}} = \frac{e^{5x+7+(-x-3)}}{e^{2x+3}} = \frac{e^{4x+4}}{e^{2x+3}} = e^{4x+4-(2x+3)} = e^{2x+1}$
- $D = \frac{1}{e^{-1}} = \frac{e^0}{e^{-1}} = e^{0-(-1)} = e^1 = e$
- $E = e^2 \times e^{-4} = e^{2+(-4)} = e^{-2}$
- $F = e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$
- $G = \frac{(e^{-5})^2}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{e^{2 \times (-5)}}{e^{2+(-6)}} = \frac{e^{-10}}{e^{-4}} = e^{-10-(-4)} = e^{-6}$
- $H = (e^{3x+2})^2 = e^{2 \times (3x+2)} = e^{6x+4}$
- $I = e^{2x+1} \times e^{-3x+5} = e^{2x+1+(-3x+5)} = e^{-x+6}$
- $J = \frac{e^{-x+1}}{e^{3x-4}} = e^{-x+1-(3x-4)} = e^{-4x+5}$
- $K = \frac{e^{x-7}}{e^{2x}} \times \frac{e^{3x+5}}{e^{-2x+1}} = \frac{e^{x-7+3x+5}}{e^{2x-2x+1}} = \frac{e^{4x-2}}{e^1} = e^{4x-2-1} = e^{4x-3}$

Exercice N°2 :

- $A = e^x(e^x + 5) = e^x \times e^x + 5e^x$
 $= e^{2x} + 5e^x$
- $B = e^{-x}(e^x - 2) = e^{-x} \times e^x + e^{-x} \times (-2)$
 $= e^{-x+x} - 2e^{-x}$
 $= e^0 - 2e^{-x} = 1 - 2e^{-x}$
- $C = e^{2x}(e^x - e^{-x}) = e^{2x} \times e^x + e^{2x} \times (-e^{-x})$
 $= e^{2x+x} - e^{2x-x} = e^{3x} - e^x$
- $D = (e^x + 2)(e^x + 5) = e^x \times e^x + e^x \times 5 + 2 \times e^x + 2 \times 5$
 $= e^{2x} + 5e^x + 2e^x + 10 = e^{2x} + 7e^x + 10$
- $E = (e^x - 1)(e^{-x} + 3) = e^x \times e^{-x} + e^x \times 3 + (-1) \times e^{-x} + (-1) \times 3$
 $= e^0 + 3e^x - 1e^{-x} - 3$
 $= 2e^x - 2$
- $F = (e^x + 1)(2 - e^{-x}) = e^x \times 2 + e^x \times (-e^{-x}) + 1 \times 2 + 1 \times (-e^{-x})$
 $= 2e^x - e^0 + 2 - e^{-x}$
 $= 2e^x + 1 - e^{-x}$
- $G = (e^x - 2)^2 = (e^x)^2 - 2 \times e^x \times 2 + 2^2$
 $= e^{2x} - 4e^x + 4$

- $H = (e^x + 1)^2 = (e^x)^2 + 2 \times e^x \times 1 + 1^2$
 $= e^{2x} + 2e^x + 1$
- $I = (e^x - 3)(e^x + 3) = (e^x)^2 - 3^2$
 $= e^{2x} - 9$

Exercice N°3 :

$$\begin{aligned}
 f(x) + f(-x) &= \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2}{e^{-x} + 1} \\
 &= \frac{2 \times (e^{-x} + 1)}{(e^x + 1) \times (e^{-x} + 1)} + \frac{2 \times (e^x + 1)}{(e^{-x} + 1) \times (e^x + 1)} \\
 &= \frac{2 \times (e^{-x} + 1) + 2 \times (e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} \\
 &= \frac{2e^{-x} + 2 + 2e^x + 2}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} \\
 &= \frac{2e^{-x} + 2e^x + 4}{2e^{-x} + 2e^x + 4} \\
 &= \frac{e^0 + e^x + e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 2e^x + 4} \\
 &= \frac{e^x + e^{-x} + 2}{2(e^{-x} + e^x + 2)} \\
 &= \frac{e^x + e^{-x} + 2}{e^x + e^{-x} + 2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Exercice N°4 :

- 1) a) $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$ $S = \{0\}$
 b) $e^x = 0$ Impossible car on a vu que l'exponentielle était strictement positive sur $\mathbb{R}$
 c) $e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$

Impossible car on a vu que l'exponentielle était strictement positive sur $\mathbb{R}$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $e^{4x} = e^{5x-1} \Leftrightarrow 4x = 5x - 1 \Leftrightarrow x = 1$ $S = \{1\}$
 b) $e^{4x^2} = e^{36} \Leftrightarrow 4x^2 = 36 \Leftrightarrow 4x^2 - 36 = 0$
 $\Leftrightarrow (2x - 6)(2x + 6) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ $S = \{-3; 3\}$
 c) $e^{2x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{2x-3} = e^0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ $S = \{\frac{3}{2}\}$

- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $(3x - 5)(e^x + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ ou $e^x = -2$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ seulement puisque $e^x > 0$ $S = \{\frac{5}{3}\}$
- b) $4e^{-x} + 7xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(4 + 7x) = 0$
 $\Leftrightarrow e^{-x} = 0$ ou $4 + 7x = 0$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{4}{7}$ seulement puisque $e^{-x} \neq 0$ $S = \{-\frac{4}{7}\}$

- 4) a) $X^2 + 6X - 7 = 0$ pour $X_1 = 1$ ou $X_2 = -7$

b) En posant $e^x = X$, l'équation $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$ devient : $X^2 + 6X - 7 = 0$.

Par a), on en déduit que $e^x = 1 = e^0$ ou $e^x = -7$.

Ce qui donne seulement $x = 0$ puisque $e^x > 0$.

$$S = \{0\}$$

- 5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $X^2 + 3X - 4 = 0$ donne $X_1 = 1$ et $X_2 = -4$

On en déduit que $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ pour $x = 0$.

$$S = \{0\}$$

b) $X^2 + 4X + 3 = 0$ donne $X_1 = -1$ et $X_2 = -3$

On en déduit que $e^{2x} + 4e^x + 3 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car l'exponentielle est strictement positive.

Exercice N°5 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

• f est de la forme ku , avec k constante, donc $f'(x) = 2e^x$

• On a simplement une addition de fonctions simples et dérivables, donc $g'(x) = 2 + e^x$

• h est de la forme e^U , avec $U = 2x + 1$ et $U' = 2$, donc $h'(x) = 2e^{2x+1}$

• $i(x) = (x^2 + 3x + 5)e^x$ de la forme UV avec $U = x^2 + 3x + 5$ et $V = e^x$ et donc $U' = 2x + 3$ et $V' = e^x$
 $i'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 5)e^x$ donc $i'(x) = e^x(x^2 + 5x + 8)$

• $j(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$ de la forme $\frac{U}{V}$ avec $U = 4e^x$ et $V = e^x + 1$ et donc $U' = 4e^x$ et $V' = e^x$
 $j'(x) = \frac{(4e^x)(e^x + 1) - (4e^x)(e^x)}{(e^x + 1)^2}$
 $j'(x) = \frac{4e^{2x} + 4e^x - 4e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$ donc $j'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$

• $k(x) = \frac{x^2 + x + 1}{e^x}$ de la forme $\frac{U}{V}$ avec $U = x^2 + x + 1$ et $V = e^x$ et donc $U' = 2x + 1$ et $V' = e^x$
 $k'(x) = \frac{(2x + 1)e^x - (x^2 + x + 1)e^x}{(e^x)^2}$
 $= \frac{e^x((2x + 1) - (x^2 + x + 1))}{e^{2x}}$ donc $k'(x) = \frac{e^x(-x^2 + x)}{e^{2x}}$

• $l(x) = 10e^{-0,5x+1}$ de la forme e^U avec $U = -0,5x + 1$ et $U' = -0,5$
 $l'(x) = -0,5e^{-0,5x+1}$ donc $l'(x) = -0,5e^{-0,5x+1}$

• $m(x) = (2x - 3)e^{-0,1x}$ de la forme UV avec $U = 2x - 3$ et $V = e^{-0,1x}$ et donc $U' = 2$ et $V' = -0,1e^{-0,1x}$
 $m'(x) = 2e^{-0,1x} + (2x - 3)(-0,1e^{-0,1x}) = e^{-0,1x}(2 - 0,2x + 0,3)$ donc $m'(x) = e^{-0,1x}(2,3 - 0,2x)$

• $n(x) = e^{-x^2+x}$ de la forme e^U avec $U = -x^2 + x$ et $U' = -2x + 1$
 $n'(x) = (-2x + 1)e^{-x^2+x}$ donc $n'(x) = -(-2x + 1)e^{-x^2+x}$

Exercice N°6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse :

1) $f(0) = (2 \times 0 + 1)e^0 = 1$ donc $A(0; 1)$ appartient bien à la courbe $\mathcal{C}$. Affirmation VRAIE

2) f est de la forme UV avec $U = 2x + 1$ et $V = e^x$ $U' = 2$ et $V' = e^x$
 On a donc $f'(x) = U'V + UV' = 2e^x + (2x + 1)e^x = 2xe^x + 3e^x$ Affirmation FAUSSE

3) Une droite (et donc une tangente) est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul.
 La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-1,5$ a pour coefficient directeur $f'(-1,5)$.
 Or $f'(x) = 2xe^x + 3e^x$ donc $f'(1,5) = 2 \times (-1,5)e^{-1,5} + 3e^{-1,5} = 0$ Affirmation VRAIE

4) Étudions le signe de $f'(x) = 2xe^x + 3e^x$
 • Il nous faut la dérivée sous sa forme factorisée : $f'(x) = e^x(2x + 3)$

- Signe de la dérivée :

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
Signe de e^x		+	+
Signe de $2x + 3$	-	0	+
Signe de $f'(x)$	-	0	+

- Variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
Variations de f			

Affirmation FAUSSE

- 5) Il suffit de regarder le tableau de variations et de voir que $f(-1,5) < 0$

Affirmation FAUSSE

Exercice N°7 :

- 1) f est du type UV avec $U = 3 - 8x$ et $V = e^{-2x}$, $U' = -8$ et $V' = -2e^{-2x}$

On a alors : $f'(x) = -8e^{-2x} + (3 - 8x) \times (-2e^{-2x}) = (-8 + 3 - 8x)e^{-2x} = (-5 - 8x)e^{-2x}$.

On sait qu'une exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$-5 - 8x = 0 \iff x = \frac{-5}{8}$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-5/8$	$+\infty$
Signe de e^{-2x}		+	+
Signe de $-5 - 8x$	+	0	-
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

- 2) La tangente à $\mathcal{C}$ en 0 a pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

On a $f'(0) = -5$ et $f(0) = 3$, on en déduit que $y = -5x + 3$

- 3) La courbe admet une tangente horizontale si et seulement si $f'(x) = 0$.

D'après le tableau de variations, on en déduit qu'il y a une tangente horizontale au point d'abscisse $-\frac{5}{8}$